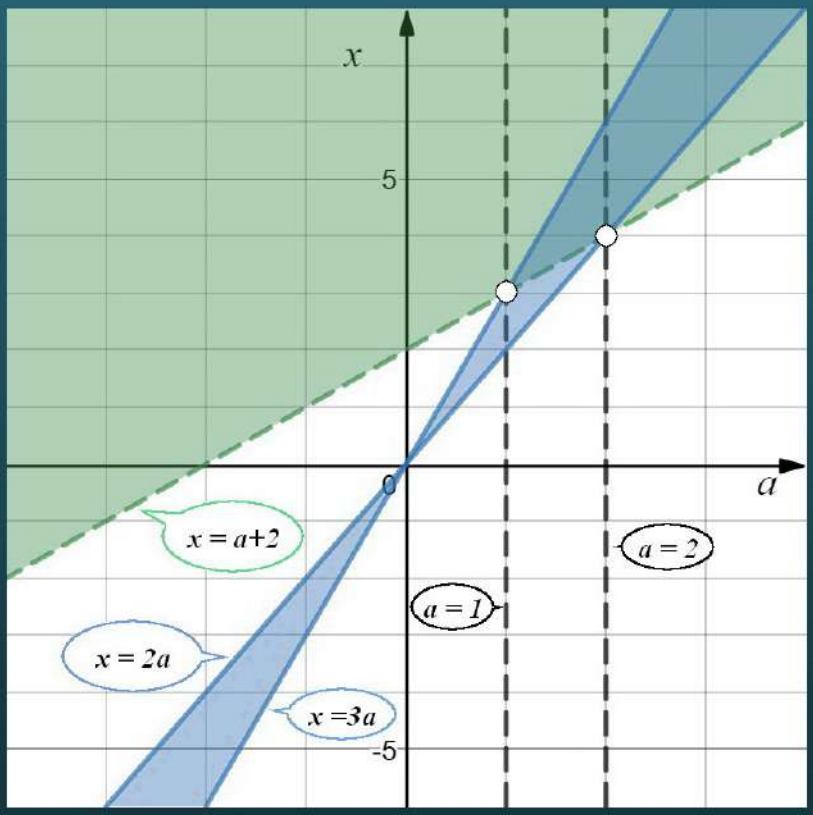
А. В. Сясєв
І. Г. Баланенко

ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРАМИ
Частина I

Навчально-методичний посібник



Дніпро
2019

Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Присвячено 100-річчю
Дніпровського
національного університету
імені Олеся Гончара

А.В. Сясєв, І.Г. Баланенко

ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРАМИ

Частина I

Навчально-методичний посібник для вчителів і викладачів математики, студентів математичних спеціальностей педагогічних вишів, абітурієнтів

Рекомендовано Вченою радою
Дніпровського національного університету
імені Олеся Гончара
Протокол № 11 від 22.04.2019

Дніпро – 2019

УДК 51:373.5.016
ББК 74.262
С 99

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. Н.В. Парфінович

канд. фіз.-мат. наук, доц. В.К. Кірман

С 99 Сясєв, А.В. Задачі з параметрами. Частина I [Текст] / А.В. Сясєв, І.Г. Баланенко. — Д.: Дніпровський нац. ун-т, 2019. — 104 с.

Пропонований посібник є першою частиною роботи авторів і містить загальні теоретичні відомості, різні методи розв'язування задач з параметрами з їх наочною демонстрацією (візуалізацією), а також детальний розгляд як типових, так і нестандартних задач з параметрами для алгебраїчних рівнянь та дослідження квадратичної функції.

Призначений для студентів, що навчаються за освітньою програмою 0.14 «Середня освіта. Математика», абітурієнтів, учнів спеціалізованих шкіл і ліцеїв, вчителів і викладачів математики.

Навчальне видання

Андрій Валерійович Сясєв,
Ірина Григорівна Баланенко

Задачі з параметрами. Частина I

В авторській редакції
Орігінал-макет А.В. Сясєв

Підписано до друку 26.04.2019. Формат 60x841/16. Папір друкарський. Друк плоский.
Ум. друк. арк. 5. Ум. фарбовідб. 5. Облік.- вид. арк. 5. Тираж 100 пр.

ДНУ ім. О. Гончара, просп. Гагаріна, 72, м. Дніпро, 49010.

© Сясєв А.В., Баланенко І.Г., 2019

Зміст

Вступ **4**

1 Загальні теоретичні відомості **7**

1.1. Алгоритм розв'язування рівняння або нерівності з параметром . 8

1.2. Аналітичний і графічний методи порівняння виразів, що залежать від параметра 11

1.3. Рівносильні рівняння та нерівності 14

1.4. Метод інтервалів 19

2 Розв'язання лінійних і квадратних рівнянь та нерівностей, що містять параметр **25**

2.1. Лінійні рівняння і нерівності, їх системи 25

2.2. Квадратні рівняння і нерівності 49

2.2.1. Необхідні і достатні умови розташування коренів квадратного тричлена 49

2.2.2. Розв'язання типових задач 54

2.2.3. Задачі на застосування теорем Вієта 76

2.2.4. Задачі, які зводяться до дослідження квадратного тричлена 89

Вступ

Розв'язування задач з параметром є одним з найбільш складних розділів математики. При розв'язуванні задач з параметрами необхідні, крім знань про стандартні методи розв'язання рівнянь і нерівностей, практичні навички й вміння проводити розгалужені логічні побудови, а також акуратність і уважність, щоб не втратити розв'язків і не придбати зайвих. Це вимагає від учня більш розвиненого логічного мислення й математичної культури, але, своєю чергою, проробка задач з параметрами сприяють розвитку зазначених якостей. Результати моніторингу знань (ДПА, ЗНО та інші) показують, що учні, які володіють методами розв'язання задач із параметрами, зазвичай успішно справляються й з іншими задачами.

Теоретичне вивчення багатьох процесів і явищ часто приводить до самих різних рівнянь або нерівностей, що містять параметри, і необхідною частиною їх розв'язання є дослідження характеру процесу залежно від значень параметрів. Таким чином, задачі з параметрами можна вважати невеликими дослідницькими. Але часто виявляється, що випускник середнього навчального закладу або взагалі не має уявлення про розв'язання задач з параметрами, або губиться навіть у разі найпростішого виду подібних задач, коли єдиним моментом, що ускладнює є розгалуження розв'язків і, відповідно, розгалуження відповіді.

Усе вищезазначене дає підстави говорити про необхідність спеціальної підготовки студентів вишу (випускників), подальша робота яких буде пов'язана з педагогічною діяльністю у середніх закладах освіти, а також відповідних знань потребують і вчетелі й викладачі сучасної середньої школи

та ліцеїв. На наш авторський погляд, кожен педагог–математик повинен сам усвідомлювати, що випускнику середнього навчального закладу корисно володіти різними методами розв'язання подібних задач — аналітичними і графічними, вміти переводити словесну умову задачі в аналітичну форму — зводити її до розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем і сукупностей. Важливо, щоб учні вже на перших простих прикладах засвоїли, по-перше, необхідність акуратного поводження з параметром — фіксованим, але невідомим числом, зрозуміли, що воно має подвійну природу (з одного боку, це деяке число, з іншого боку, міра свободи дій з ним обмежується його невідомістю); по-друге, що запис відповіді істотно відрізняється від запису відповідей аналогічних рівнянь і нерівностей без параметра.

Методично було б правильно кожен пройдений тип рівнянь (нерівностей) завершувати задачами з використанням параметра. По-перше, учню важко звикнути до параметра за два-три заняття — потрібен час; по-друге, використання подібних задач покращує закріплення пройденого матеріалу; по-третє, воно сприяє розвитку його математичної і логічної культури, а також розвитку інтересу до математики, оскільки відкриває перед ним нові методи і можливості для самостійного пошуку.

Пропонований посібник логічно структуровано, він містить розділи та підрозділи, кожний з яких присвячено окремій темі. У посібнику вміщено методичні вказівки до тем, приклади розв'язання типових задач, а також завдання для самостійної роботи, правильність виконання яких можна перевірити за наведеними відповідями.

Посібник є першою частиною роботи авторів і містить загальні теоретичні відомості, різні методи розв'язування задач з параметрами з їх наочною демонстрацією (візуалізацією), а також детальний розгляд як типових, так і нестадартних задач з параметрами для алгебраїчних рівнянь та дослідження квадратичної функції. Саме ці розділи займають великий обсяг в програмі середньої школи і мають важливе значення на початку формування навичок дослідницької роботи учнів.

Мета посібника — допомогти учням старших класів самостійно оволодіти

деякими прийомами розв'язання рівнянь і нерівностей з параметром, а вчителям і викладачам — планомірно організувати роботу за даною темою в класі на уроці або факультативних заняттях (вибіркових курсах).

Автори висловлюють подяку учням 10 - 11 класів 2015-2018 рр. Малого університету регіонального навчально-методичного центру моніторингу освіти навчально-методичного центру доуніверсітетської подготовки Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, в роботі з якими було апробовано даний посібник.

Розділ 1

Загальні теоретичні відомості

Нехай задано рівняння або нерівність з двома змінними:

$$F(x,a)=0 \qquad (G(x,a)\geq 0 \quad \text{або} \quad G(x,a)>0) \tag{1.1}$$

Задача про розв'язання рівняння (нерівності) (1.1) може бути сформульована одним з двох способів.

1. Знайти всі пари чисел (x,a), що задовольняють цьому рівнянню (нерівності). В цьому випадку вираз (1.1) називається *рівнянням (нерівністю) з двома змінними x і a,* в якому обидві змінні x і a грають однакову роль.

2. Для кожного значення змінної a з деякої числові множини $\mathbb{A}$ розв'язати рівняння (нерівність) відносно x. Тоді вираз (1.1) називають *рівнянням (нерівністю) зі змінною x і параметром a, а множину $\mathbb{A}$ — областю зміни параметра a.* При відсутності обмежень під областю зміни параметра розуміють множину всіх дійсних чисел.

Якщо параметру, що міститься в рівнянні (нерівності), надати деяке конкретне числове значення, то можливий один з випадків:

- одержуємо рівняння або нерівність з однією невідомою x;
- одержуємо вираз, позбавлений змісту.

У першому випадку значення параметра називається *припустимим*, у другому — *неприпустимим*. Розв'язати рівняння або нерівність з параметром означає, що для кожного припустимого значення параметра треба знайти множину всіх значень невідомого, які задовольняють рівнянню або нерівності. Слід зазначити, що вираз (1.1) — це, по суті, загальний запис сімейства рівнянь (нерівностей), які утворюються з нього при заданих значеннях параметра a. Тому *розв'язати рівняння (нерівність) (1.1) (зі змінною x і параметром a) означає, що на множині дійсних чисел треба розв'язати сімейство рівнянь (нерівностей), які одержані з (1.1) при всіх припустимих значеннях параметра a.*

Відзначимо, що при деяких множинах з припустимих значень параметра a можуть утворюватися одні сімейства рівнянь (нерівностей), при інших — інші. Наприклад, рівняння (нерівність) з квадратного (квадратичного) стає лінійним: $ax^2 + bx + c = 0$ — квадратне рівняння при $a \neq 0$ (b, c — довільні) стає лінійним $bx+c = 0$ при $a = 0$ ($b \neq 0$, c — довільне). Тому для полегшення розв'язання зручно нанести на числову пряму значення параметра, які називають контрольними, при яких або при переході через які відбуваються якісні зміни рівняння.

1.1. Алгоритм розв'язування рівняння або нерівності з параметром

При розв'язуванні рівняння (нерівності) (1.1) можна скористатися наступним алгоритмом.

1. Визначаємо обмеження, що накладаються на значення невідомого x і параметра a, які випливають з того, що функції і арифметичні операції в $F(x, a)$ або $G(x, a)$ мають зміст.

2. Визначаємо формальні розв'язки (1.1), що записуються без урахування обмежень. Якщо при розв'язуванні виникають контрольні значення параметра, то їх наносимо на числову вісь Oa. Ці значення розбивають область припустимих значень параметра на підмножини. На кожній з підмножин розв'язуємо задане рівняння.

3. Виключаємо ті значення параметра, при яких формальні розв'язки не задовольняють отриманим обмеженням.

4. На числову вісь Oa додаємо значення параметра, знайдені в п.3. Для кожного з проміжків на осі Oa записуємо всі одержані розв'язки в залежності від значень параметра a. (У разі досить простих рівнянь цей пункт можна опустити).

5. Надаємо відповідь, тобто записуємо розв'язки в залежності від значень параметра a.

Зауваження 1.1. *Наявність параметра в задачі передбачає спеціальну форму запису відповіді, що дозволяє встановити, якою є відповідь для будь-якого припустимого значення параметра. Неприпустимі значення також вказуються у відповіді, і вважається, що при цих значеннях параметра задача не має розв'язку. При записі відповіді зазвичай значення параметра перелічуються в порядку зростання від $-\infty$ до $+\infty$, але іноді для компактності відповіді об'єднують проміжки для параметра, на яких формули розв'язку збігаються.*

Зауваження 1.2. *У разі розгалуження розв'язку зручно використовувати числову пряму Oa, на яку наносяться контрольні значення параметра, а на інтервалах, на які ці значення розбили пряму, вказуються відповіді задачі. Даний прийом дозволяє в подальшому не втратити знайдені відповіді і чітко вказати значення параметра, яким вони відповідають.*

Продемонструємо сказане вище на прикладі.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $a(a-2)x > 2-a$.

Розв'язання. Контрольні значення параметра виходять з умови

$$a(a-2)=0,$$

оскільки при $a(a-2)=0$ нерівність не містить змінної x.

Нанесемо на числову вісь Oa контрольні значення. Вони розбивають вісь Oa на інтервали (рис. 1.1):

$$1)\quad a<0; \qquad 2)\quad 0<a<2; \qquad 3)\quad a>2.$$

На кожному з цих інтервалів розв'яжемо задану нерівність. Значення $a=0$ і $a=2$ вимагають окремого розгляду.

Якщо $a<0$, то $a(a-2)>0$. Розділивши обидві частини нерівності на множник $a(a-2)\neq 0$, отримаємо $x>-\dfrac{1}{a}$.

Якщо $0<a<2$, то $a(a-2)<0$, отже $x<-\dfrac{1}{a}$.

Якщо $a>2$, то $a(a-2)>0$ і $x>-\dfrac{1}{a}$.

При $a=0$ отримуємо нерівність $0\cdot x>2$, що не має розв'язків.

При $a=2$ отримуємо $0\cdot x>0$, тобто розв'язків також немає.

Нанесемо відповіді (рис. 1.1), що були одержані в ході розв'язування на відповідні інтервали числової осі Oa і запишемо відповідь.

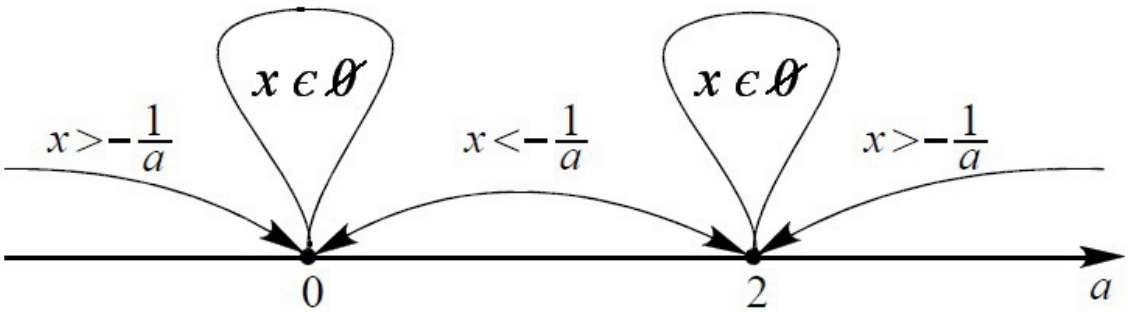


Рис. 1.1

Зауваження 1.3. *Інтервал, до якого належить відповідний розв'язок, позначається на малюнку дугою. На її кінці ставиться стрілочка в тому*

випадку, якщо цей розв'язок не належить до крайньої точки інтервалу.

Відповідь: якщо, $a < 0$ то $x > -\dfrac{1}{a}$;

якщо $0 < a < 2$, то $x < -\dfrac{1}{a}$;

якщо $a > 2$, то $x > -\dfrac{1}{a}$;

якщо $a = 0$ і $a = 2$, то розв'язків немає.

1.2. Аналітичний і графічний методи порівняння виразів, що залежать від параметра

При розв'язанні рівнянь (нерівностей) з параметрами часто доводиться порівнювати декілька виразів, що залежать від параметра, знаходити серед них найбільше або найменше. Зазвичай застосовують аналітичний метод, тобто складають і розв'язують систему нерівностей. У разі двох виразів досить розв'язати одну нерівність. Якщо ж виразів більше, то краще використовувати графічний метод.

Приклад 2. Порівняти числа a^2 та $3a + 4$.

Розв'язання. Знайдемо значення параметра a, при яких число a^2 більше числа $3a+4$. Для цього розв'яжемо нерівність $a^2 > 3a+4$ або $a^2-3a-4 > 0$. Її розв'язок має вигляд $a \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$. При $a = -1$ і $a = 4$ виконується рівність $a^2 = 3a + 4$, тобто числа рівні. Відповідно, якщо $a \in (-1; 4)$ число a^2 менше числа $3a + 4$.

Відповідь: якщо, $a \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$ то $a^2 > 3a + 4$;

якщо $a = 1$ або $a = 4$, то $a^2 = 3a + 4$;

якщо $a \in (-1; 4)$, то $a^2 < 3a + 4$.

Приклад 3. Визначити найбільше з чисел $1 - a^2$, $\quad -2a - 7$, $\quad \dfrac{1+a}{3}$, $a - 1$ і $\dfrac{-(1+a)}{3}$.

Розв'язання. Скористаємося графічним методом. Для цього побудуємо в системі координат Oax графіки функцій $x = 1 - a^2$, $\quad x = -2a - 7$,

$x = \dfrac{1+a}{3}$, $\quad x = a - 1 \quad$ і $\quad x = \dfrac{-(1+a)}{3}$ (рис 1.2).

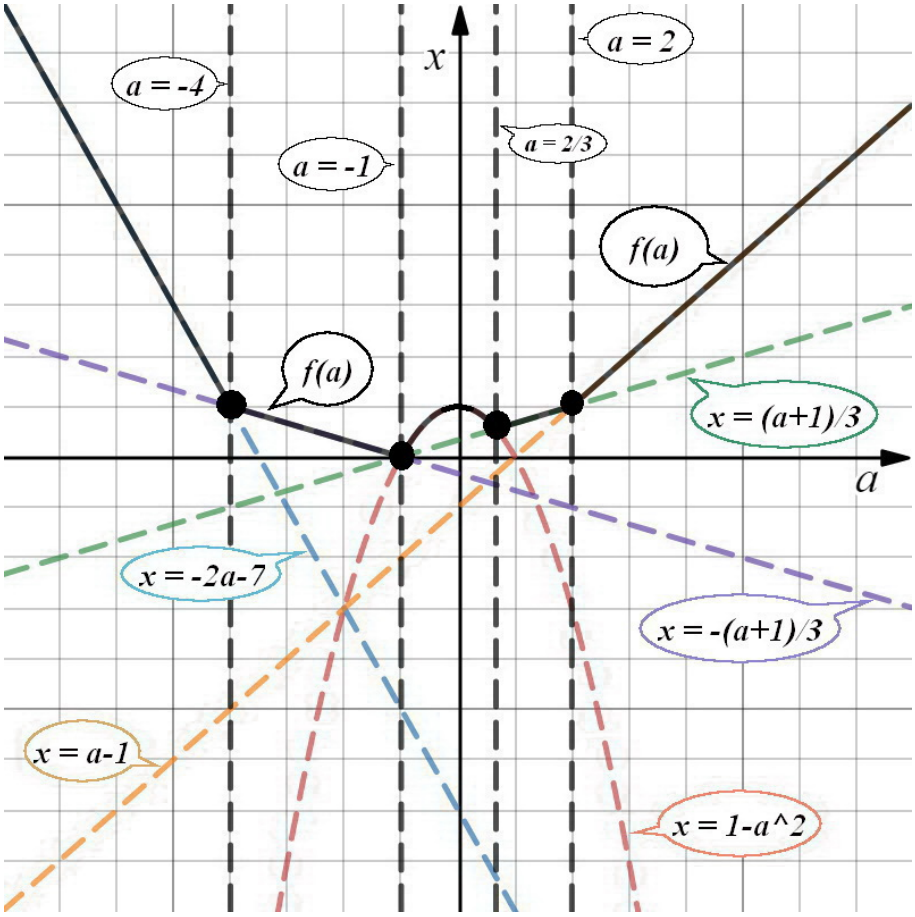


Рис. 1.2

Для кожного значення змінної a, проводячи пряму $a = const$, визначаємо ординати її точок перетину з побудованими графіками функцій. З рис. 1.2 видно, що при фіксованому значенні a, з чисел $1 - a^2$, $\quad -2a - 7$, $\dfrac{1+a}{3}$, $\quad a - 1 \quad$ і $\quad \dfrac{-(1+a)}{3}$ буде найбільшим те, для якого ордината точки перетину відповідного графіка і прямої $a = const$ буде найбільшою (фактично обираємо найвищі точки перетину графіків).

Точки -4, $\quad -1$, $\quad \dfrac{2}{3}$ і 2 розбивають числову пряму на п'ять інтервалів. На кожному з них записуємо відповідь.

Зауваження 1.4. *Шукане значення лежить на графіку функції*

$$f(a) = \max\left\{1 - a^2,\ -2a - 7,\ \frac{1+a}{3},\ -1,\ \frac{-(1+a)}{3}\right\}.$$

Графік $f(a)$ на рис. 1.2 зображений суцільною лінією.

Відповідь: якщо, $a \le -4$ то найбільше число дорівнює $-2a-7$;

якщо $-4 < a \le -1$, то $\dfrac{-(1+a)}{3}$;

якщо $-1 < a \le \dfrac{2}{3}$, то $1-a^2$;

якщо $\dfrac{2}{3} < a \le 2$, то $\dfrac{(1+a)}{3}$;

якщо $a > 2$, то $a-1$.

Приклад 4. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} x^2-5ax+6a^2 \le 0, \\ x-a-2>0. \end{cases}$

Розв'язання. Коренями рівняння $x^2-5ax+6a^2=0$ є числа $2a$ і $3a$. Розв'язком першої нерівності системи є множина $[x_1; x_2]$, де $x_1 = \min\{2a; 3a\}$ і $x_2 = \max\{2a; 3a\}$. Тобто $[2a; 3a]$ при $a \ge 0$ і $[3a; 2a]$ при $a < 0$.

Розв'язком другої нерівності є множина $(a+2; +\infty)$.

Розв'язок системи являє собою перетин множин розв'язків першого та другого нерівностей.

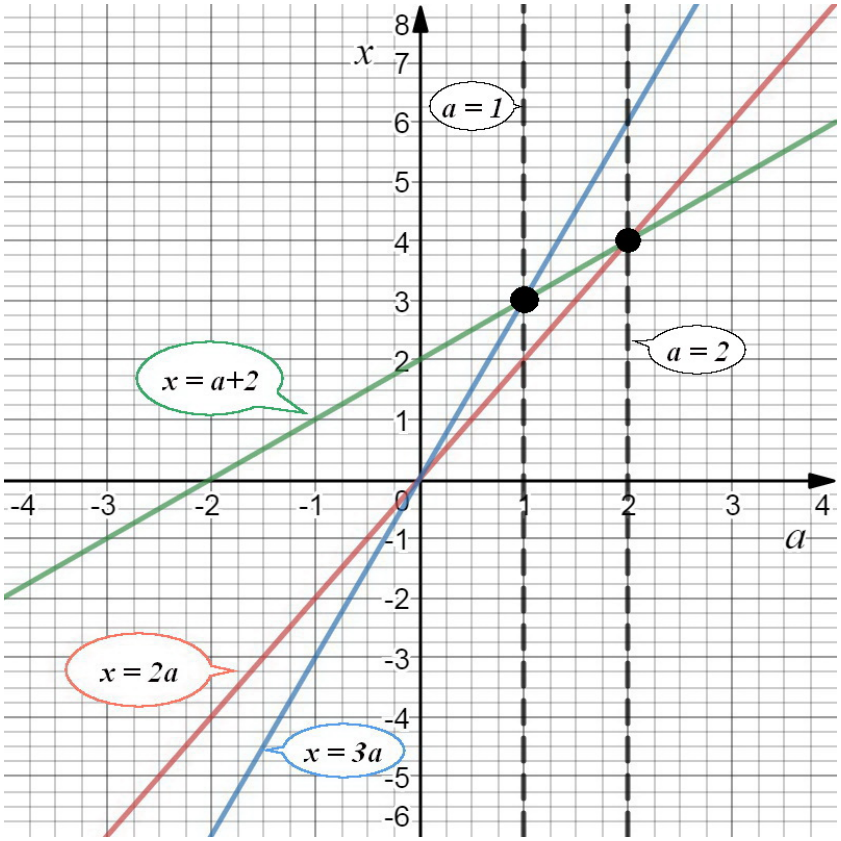


Рис. 1.3

Для порівняння чисел $2a$, $3a$ і $a+2$ скористаємося графічним способом, діючи аналогічно до попереднього прикладу (рис. 1.3).

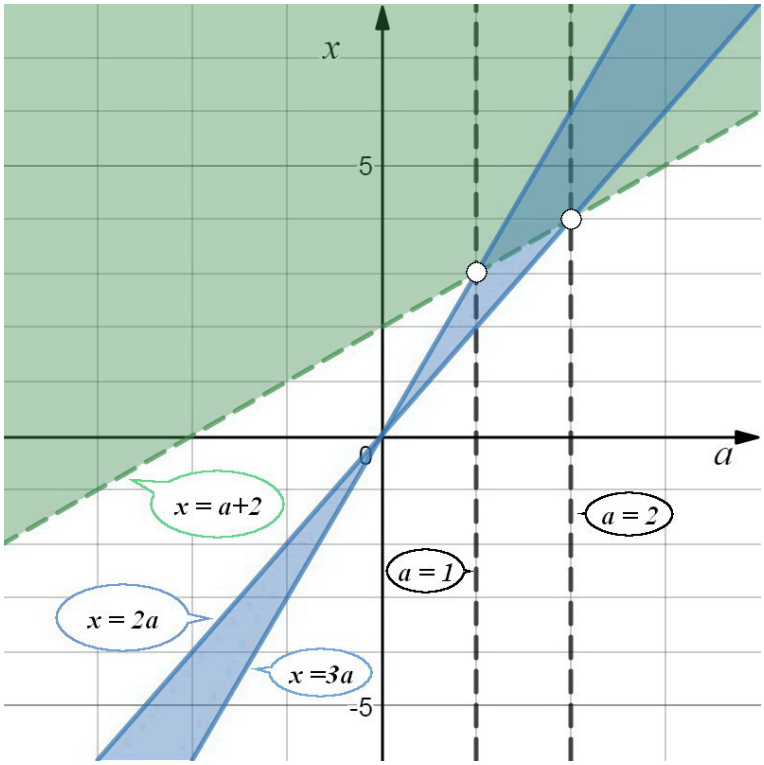


Рис. 1.4

На рис. 1.4 видно, якщо $a < 1$, то $a+2 > 2a > 3a$, і при $a = 1$ матимемо $a+2 = 3a > 2a$, і, як наслідок, якщо $a \leq 1$, то система не має розв'язків; якщо $1 < a < 2$, то $2a < a+2 < 3a$ і $x \in (a+2; 3a]$ — розв'язок системи; якщо $a = 2$, то $3a > a+2 = 2a$ і $x \in (2a; 3a]$; якщо $a > 2$, то $a+2 < 2a < 3a$ і $x \in [2a; 3a]$.

Відповідь: якщо, $a \leq 1$, то система не має розв'язків;

якщо $1 < a < 2$, то $x \in (a+2; 3a]$;

якщо $a = 2$, то $x \in (2a; 3a]$;

якщо $a > 2$, то $x \in [2a; 3a]$.

1.3. Рівносильні рівняння та нерівності

Означення 1.1. *Два рівняння* $f_1(x,a) = g_1(x,a)$ *і* $f_2(x,a) = g_2(x,a)$ *називаються рівносильними (еквівалентними), якщо вони мають одну і*

ту ж множину розв'язків. В цьому випадку пишуть

$$f_1(x,a) = g_1(x,a) \quad \Longleftrightarrow \quad f_2(x,a) = g_2(x,a).$$

Означення 1.2. *Якщо всі корені рівняння $f_1(x,a) = g_1(x,a)$ є коренями $f_2(x,a) = g_2(x,a)$, але при цьому ОДЗ рівнянь не співпадають, то друге рівняння називають наслідком першого. В цьому випадку пишуть*

$$f_1(x,a) = g_1(x,a) \quad \Longrightarrow \quad f_2(x,a) = g_2(x,a).$$

Означення 1.3. *Рівняння рівносильні на деякій множині значень змінної x, якщо вони мають одні й ті ж розв'язки, що належать цій множині.*

При розв'язуванні рівнянь в основному використовують два способи. У першому випадку, виконуючи деякі перетворення, здійснюють перехід від вихідного рівняння до рівносильного, поки рівняння не прийме більш простий вигляд. Другий спосіб полягає в заміні вихідного рівняння його наслідком (таке перетворення може бути зроблено кілька разів). Оскільки в такий спосіб можна набути сторонні корені, то на останньому етапі розв'язування необхідно виконати перевірку отриманих розв'язків. Це не складно зробити в разі рівнянь без параметра, однак при наявності параметра перевірка стає іноді дуже складною. В цьому випадку еквівалентність досягається завдяки використанню умов, що визначають ОДЗ: вихідне рівняння замінюють рівносильною системою, що складається зі знову отриманого рівняння і умов, що визначають ОДЗ. Цей прийом дозволяє відразу відкинути зайві корені.

До загальних методів розв'язування рівнянь всіх типів (раціональних, ірраціональних, тригонометричних, показникових і логарифмічних) належать такі: розкладання на множники; заміна змінної; використання властивостей обмеженості або монотонності функцій; графічний метод.

Приклад 5. При яких значеннях параметра a рівняння

$$x^2 = a \tag{1.2}$$

і

$$\sqrt{x} = a \tag{1.3}$$

рівносильні?

Розв'язання. При значеннях параметра $a < 0$ обидва рівняння не мають розв'язків. Оскільки множина розв'язків кожного рівняння в цьому випадку представляє порожня множина, то рівняння рівносильні.

При $a = 0$ обидва рівняння мають розв'язок $x = 0$. Отже, в цьому випадку рівняння також рівносильні.

При значеннях параметра $a > 0$ рівняння (1.2) має два корені $x_1 = -\sqrt{a}$ і $x_2 = \sqrt{a}$, а рівняння (1.3) має один корінь $x = a^2$. Отже, в цьому випадку рівняння не рівносильні.

Відповідь: $a \leq 0$.

Приклад 6. Визначити, при яких значеннях параметра a рівняння

$$(x^2 - a^2)(x - a^2) = 0 \tag{1.4}$$

є наслідком рівняння

$$(x - a)^2 = 0, \tag{1.5}$$

а також коли (1.4) і (1.5) рівносильні?

Розв'язання. Розв'яжемо спочатку рівняння (1.4).

$$(x^2-a^2)(x-a^2) = 0 \Leftrightarrow (x-a)(x+a)(x-a^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - a = 0, \\ x + a = 0, \\ x - a^2 = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = a, \\ x_2 = -a, \\ x_3 = a^2. \end{array}\right.$$

- При $a = 0$ матимемо $x = 0$.

- При $a > 0$ матимемо $\left[\begin{array}{l} x_1 = a, \\ x_2 = -a, \\ x_3 = a^2. \end{array}\right.$
- При $a < 0$ відповідно $\left[\begin{array}{l} x_1 = -a, \\ x_2 = a, \\ x_3 = a^2. \end{array}\right.$

Тепер розв'яжемо рівняння (1.5).

$$(x-a)^2 = 0 \Leftrightarrow x - a = 0 \Leftrightarrow x = a.$$

- При $a = 0 \Rightarrow x = 0$.
- При $a > 0 \Rightarrow x = a$.
- При $a < 0 \Rightarrow x = -a$.

Отже, корені рівнянь (1.4) і (1.5) співпадають тільки при $a = 0$ і дорівнюють 0. Тобто рівняння у цьому випадку рівносильні. При $a > 0$ корінь $x = a$ рівняння (1.5) співпадає з коренем $x_1 = a$ рівняння (1.4), а при $a < 0$ корінь $x = a$ рівняння (1.5) співпадає з коренем $x_2 = a$ рівняння (1.4). Це означає, що при $a \neq 0$ рівняння (1.4) є наслідком рівняння (1.5).

Відповідь: при $a \neq 0$ рівняння (1.4) є наслідком рівняння (1.5);
при $a = 0$ рівняння (1.4) і (1.5) рівносильні.

Означення 1.4. *Дві нерівності $f_1(x,a) < g_1(x,a)$ і $f_2(x,a) < g_2(x,a)$ (або $f_1(x,a) \leq g_1(x,a)$ і $f_2(x,a) \leq g_2(x,a)$) називаються рівносильними на множині $\mathbb{X}$, якщо множини їх розв'язків, що належать $\mathbb{X}$, співпадають. В цьому випадку пишуть*

$$f_1(x,a) < g_1(x,a) \quad \Longleftrightarrow \quad f_2(x,a) < g_2(x,a).$$

Означення 1.5. *Якщо всі розв'язки нерівності $f_1(x,a) < g_1(x,a)$ є розв'язками нерівності $f_2(x,a) < g_2(x,a)$, то другу нерівність називають*

його наслідком. В цьому випадку пишуть

$$f_1(x,a) < g_1(x,a) \quad \Longrightarrow \quad f_2(x,a) < g_2(x,a).$$

Якщо в процесі розв'язування здійснюють перехід від вихідної нерівності до її наслідку, то наприкінці розв'язання необхідно з одержаної множини значень аргументу відібрати ті, які є розв'язками вихідної нерівності. При розв'язуванні нерівностей з параметрами слід звертати увагу на те, що формальний розв'язок нерівностей, тобто розв'язок, при якому ліві і праві частини нерівності діляться на вираз, що містить параметр, може привести до втрати розв'язків. Необхідно стежити за знаком виразу, на який діляться обидві частини нерівності, оскільки на нього може впливати значення параметра.

Приклад 7. Визначити, при яких значеннях параметра a нерівність

$$2x + 1 - 3a > 0 \tag{1.6}$$

є наслідком нерівності

$$3x - 3 + a > 0, \tag{1.7}$$

а також коли (1.6) і (1.7) рівносильні?

Розв'язання. Розв'яжемо спочатку нерівність (1.6).

$$2x + 1 - 3a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x > 3a - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{3a-1}{2}.$$

Тепер розв'яжемо нерівність (1.7).

$$3x - 3 + a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x > 3 - a \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{3-a}{3}.$$

Згідно з **означенням 1.4** нерівності (1.6) і (1.7) будуть рівносильні, якщо співпадуть їх множини розв'язків. Це можливо, якщо

$$\frac{3a-1}{2} = \frac{3-a}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 9a - 3 = 6 - 2a \quad \Leftrightarrow \quad 11a = 9 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{9}{11}.$$

З **означення 1.5** випливає, що нерівність (1.6) є наслідком нерівності (1.7), якщо множина розв'язків (1.7) міститься в множині розв'язків (1.6). Це можливо, якщо

$$\frac{3-a}{3} < \frac{3a-1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 9a - 3 > 6 - 2a \quad \Leftrightarrow \quad 11a > 9 \quad \Leftrightarrow \quad a > \frac{9}{11}.$$

Відповідь: при $a \in \left(\frac{9}{11}; +\infty\right)$ нерівність (1.6) є наслідком (1.7);

при $a = \frac{9}{11}$ нерівності (1.6) і (1.7) рівносильні.

1.4. Метод інтервалів

При розв'язуванні нерівностей з параметрами використовується метод, що базується на такій властивості функцій: ***якщо функція неперервна на інтервалі*** $(x_1; x_2)$ ***і між точками*** x_1 ***та*** x_2 ***вона не має коренів, то на інтервалі*** $(x_1; x_2)$ ***функція зберігає знак.***

Для знаходження інтервалів знакосталості на числової осі відмічають всі точки, в яких функція $f(x, a)$ обертається в нуль або стає розривною. Ці точки розбивають числову пряму на кілька інтервалів, всередині кожного з яких $f(x, a)$ неперервна і не обертається в нуль, а значить, зберігає знак. На кожному з інтервалів визначають знак функції.

Зауваження 1.5. *В даному випадку відмінність від методу інтервалів для нерівностей без параметра полягає в тому, що в даному разі значення абсцис точок, в яких функція $f(x, a)$ обертається в нуль або зазнає розрив, самі є функціями, залежними від параметра, і нанесення їх на числову вісь вимагає додаткових логічних міркувань про їх взаємне розташування на осі.*

Зауваження 1.6. *У нерівностях, що не містять параметра, для визначення знака функції $f(x,a)$ на даному інтервалі буває досить визначити знак функції в будь-якій його внутрішній точці. У нерівностях з параметром це не завжди можна зробити, оскільки самі межі інтервалу не мають конкретних числових значень. Тому рекомендується користуватися* ***«кривою знаків»*** *(іноді говорять* ***«змійкою знаків»****) — кривою, що розташована вище осі Ox, якщо значення $f(x,a)$ додатні і нижче, якщо — від'ємні.*

Раціонально використовувати «криву знаків» у випадку, коли функція $f(x,a)$, що входить у нерівність, може бути представлена як добуток (або частка) лінійних або квадратичних множників. Використовуючи «криву знаків», для кожного множника легко встановити знак $f(x,a)$ в будь-якому інтервалі, оскільки кожен з множників в даному інтервалі зберігає знак. Значення $f(x,a)$ буде додатне, якщо кількість від'ємних множників буде парне.

«Крива знаків» для відповідних лінійних множників виглядає наступним чином: для множника $(x - x_0)$ — це рис. 1.5; для $(x_0 - x)$ — рис. 1.6.

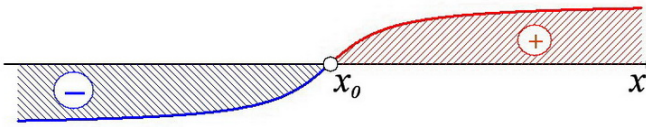


Рис. 1.5

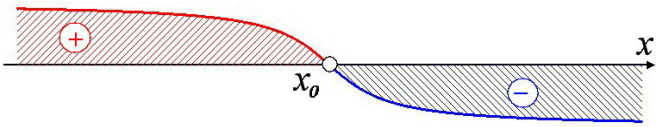


Рис. 1.6

«Крива знаків» для відповідних квадратичних множників $ax^2 + bx + c$ виглядає наступним чином: при $a > 0$, $D > 0$ — це рис. 1.7; при $a < 0$, $D > 0$ — рис. 1.8, де x_1, x_2 — корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$.

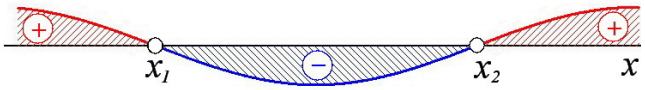


Рис. 1.7

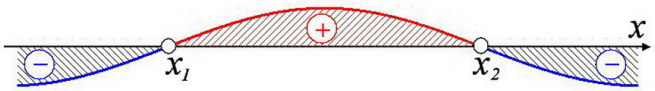


Рис. 1.8

Приклад 8. Розв'язати нерівність $\dfrac{x-a}{x-2a} \geq 0$

Розв'язання. Застосуємо метод інтервалів. Для цього розглянемо точки, в яких чисельник і знаменник обертаються в нуль. Це точки $x_1 = a$ і $x_2 = 2a$. Бачимо, що при $a > 0$ точка $x_1 = a$ розташована лівіше від точки $x_2 = 2a$; при $a < 0$ — навпаки, а при $a = 0$ вони співпадають.

Побудуємо «криву знаків» для заданої нерівності: при $a > 0$ — це рис. 1.9; при $a < 0$ — рис. 1.10.

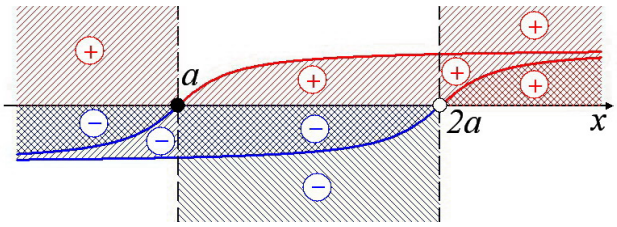


Рис. 1.9

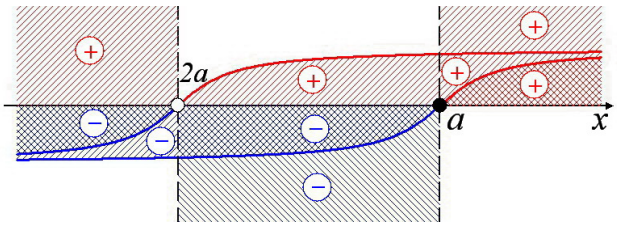


Рис. 1.10

У випадку $a = 0$ нерівність виконується при будь-якому $x \neq 0$.

Відповідь: якщо $a < 0$, то $x \in (-\infty; 2a) \cup [a; +\infty)$;

якщо $a = 0$, то $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

якщо $a > 0$, то $x \in (-\infty; a] \cup (2a; +\infty)$.

Зауваження 1.7. *При розв'язуванні нерівностей з параметрами можуть бути використані також метод заміни змінної та графічний метод.*

Приклад 9. Знайти всі значення параметра a, при яких нерівність

$$\frac{a+4-x}{x+3a} \geq 0$$

виконується для всіх x з інтервалу $3 \leq x \leq 5$.

Розв'язання. Застосуємо метод інтервалів. Знайдемо розв'язок нашої нерівності. При значенні $x = a+4$ чисельник дорівнює нулю, а при $x_2 = -3a$ — знаменник. Можливі три варіанти розташування на числовій осі Ox чисел x_1 і x_2 :

1) $x_1 > x_2$ при $a > -1$;

2) $x_1 = x_2$ при $a = -1$;

3) $x_1 < x_2$ при $a < -1$.

Використовуючи «криві знаків» чисельника і знаменника, запишемо розв'язок заданої нерівності:

1) якщо $a > -1$, то $-3a < x \leq a + 4$ (рис. 1.11);

2) якщо $a = -1$, то розв'язків немає (рис. 1.12);

3) якщо $a < -1$, то $a + 4 \leq x < -3a$ (рис. 1.13).

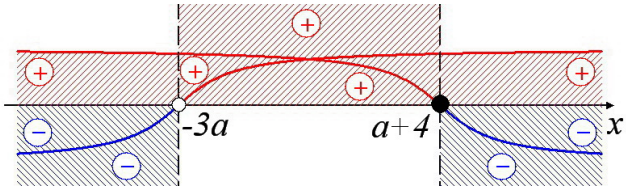


Рис. 1.11

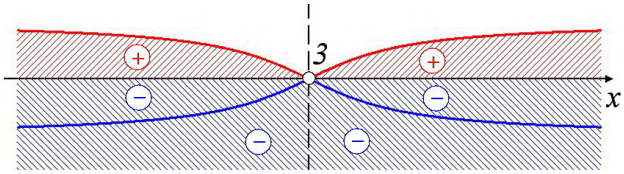


Рис. 1.12

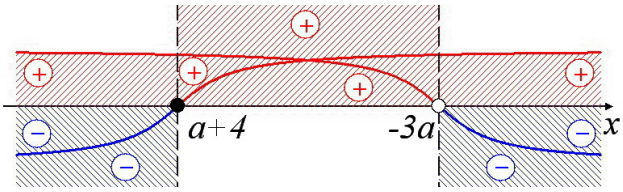


Рис. 1.13

Таким чином, умови задачі задовольняють такі значення параметра a, при яких всі значення x з множини $[3, 5]$ є розв'язком заданої нерівності. Це можливо, якщо при $a > -1$ одночасно виконуються умови $-3a < 3$ і $5 \leq a+4$, тобто $a \geq 1$, а при $a < -1$ одночасно виконуються умови $a + 4 \leq 3$ і $5 < -3a$, тобто $a < -\dfrac{5}{3}$.

Відповідь: $a \in \left(-\infty; -\dfrac{5}{3}\right) \cup [1; +\infty)$.

Завдання для самостійної перевірки знань

1. Визначити, при яких значеннях параметра a рівняння є квадратним, неповним квадратним, лінійним:

а) $5a(a-2)x^2 + (5a-2)x - a^3 - 3 = 0$; б) $ax(ax+3) + 6 = x(ax-6)$.

Відповідь: а) 1) рівняння квадратне при $a \neq 0$ або $a \neq 2$,

2) неповне квадратне при $a = 2{,}5$ і $a = -\sqrt[3]{3}$,

3) лінійне при $a = 0$ і $a = 2$;

б) 1) рівняння квадратне при $a \neq 0$ або $a \neq 1$,

2) неповне квадратне при $a = -2$,

3) лінійне при $a = 0$ і $a = 1$.

2. Визначити припустимі значення параметра a в рівнянні:

$$\text{а) } \frac{ax}{a^2-9} = \frac{a}{a^3+27}; \quad \text{б) } \frac{x}{a-2} = \sqrt{a^3-2a^2}.$$

Відповідь: а) $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$;

б) $a \in \{0\} \cup (2; +\infty)$.

3. Визначити контрольні значення параметра a.

$$\text{а) } 5a(a-2)x^2 + (5a-2)x - a^3 = 0; \quad \text{б) } \frac{2a-1}{x} + (a+2)x = 2a^3 - a^2.$$

Відповідь: а) $a = 0$ і $a = 2$;

б) $a = 0{,}5$ і $a = -2$.

4. Порівняти числа:

$$\text{а) } a^2 - 4a \text{ та } 2a - 5; \quad \text{б) } 1 - a^2, -2a - 7 \text{ і } a - 1.$$

Відповідь: а) якщо $a \in (-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$, то $a^2 - 4a > 2a - 5$;

якщо $a = 1$ або $a = 5$, то $a^2 - 4a = 2a - 5$;

якщо $a \in (1; 5)$, то $a^2 - 4a < 2a - 5$;

б) якщо $a < -2$, то $1 - a^2 < a - 1 < -2a - 7$;

якщо $a = -2$, то всі числа дорівнюють -3;

якщо $a \in (-2; 1)$, то $-2a - 7 < a - 1 < 1 - a^2$;

якщо $a = 1$, то $-2a - 7 < a - 1$ і $< 1 - a^2 = a - 1 = 0$;

якщо $a \in (1; 4)$, то $-2a - 7 < 1 - a^2 < a - 1$;

якщо $a = 4$, то $1 - a^2 = -2a - 7 = 15$ і $1 - a^2 < a - 1$;

якщо $a > 4$, то $1 - a^2 < -2a - 7 < a - 1$.

5. Визначити найменше з чисел:

$$\frac{1-a}{5}, \frac{a+1}{3}, a - 1, -\frac{a+1}{3}.$$

Відповідь: якщо $a \leq 0{,}5$, то $a - 1$;
якщо $a > 0{,}5$, то $-\dfrac{a+1}{3}$.

6. Визначити значення параметра a, при яких дані рівняння рівносильні:

$$ax - a = x - 2 \text{ та } ax - a = x + 2.$$

Відповідь: $a = 1$.

7. Визначити параметра a, при яких дані нерівності рівносильні:

$$2ax - 2a > x + 4 \text{ та } 2ax + 2a > x - 8.$$

Відповідь: $a = -3$.

8. При яких значеннях a з нерівності

а) $x^2 + 3a^2 - 1 \leq 2a(2x - 1)$ випливає нерівність $x^2 - (a+1)x + a > 0$;

б) $x^2 - a(a^2 + 1)x + a^4 < 0$ випливає нерівність $x^2 + 4x + 3 < 0$?

Відповідь: а) $a > \dfrac{2}{3}$; **б)** $a \in [-\sqrt[3]{3}; -1] \cup \{0\} \cup \{1\}$ (числа a і a^3 — корені рівняння $x^2 - a(a^2 + 1)x + a^4 < 0$).

Розділ 2

Розв'язання лінійних і квадратних рівнянь та нерівностей, що містять параметр

2.1. Лінійні рівняння і нерівності, їх системи

Лінійним рівнянням називають рівняння виду $ax + b = 0$, де $a \neq 0$. Значення параметра $a = 0$ є контрольним, оскільки в цьому випадку або розв'язок відсутній $(0 \cdot x + b = 0, b \neq 0, x \in \varnothing)$, або розв'язком є будь-який $x \in \mathbb{R}$ $(0 \cdot x + 0 = 0)$.

Нерівності виду $ax + b > 0, ax + b \geq 0, ax + b < 0, ax + b \leq 0$, де $a \neq 0$ називають ***лінійними нерівностями***. Значення параметра $a = 0$, так само як і для лінійного рівняння, є контрольним.

Щодо систем зауважимо декілька важливих моментів:

- до розгляду буде залучено: тільки системи двох рівнянь з двома невідомими, тільки системи двох нерівностей з однією змінною;
- розв'язати систему двох рівнянь (що містять параметр) з двома

невідомими x і y означає — знайти всі припустимі значення параметра, при яких існує пара чисел (x, y) така, що коли підставити ці числа до рівнянь системи, то кожне з рівнянь системи обертається у тотожність;

- розв'язком системи двох нерівностей з однією змінною будемо називати значення змінної, при якому кожне з нерівностей системи обертається у правильну числову нерівність;
- множина розв'язків системи нерівностей з однією змінною є перетинння множин розв'язків всіх нерівностей, що вміщує система;
- множина розв'язків сукупності нерівностей є об'єднання множин розв'язків нерівностей, що вміщує система.

В основі задач, пов'язаних з системами двох лінійних рівнянь з двома невідомими, лежить питання про дослідження взаємного розташування на площині двох прямих, заданих рівняннями $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ і $a_2x+b_2y+c_2 = 0$.

Система рівнянь

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

що не має розв'язків називається ***несумісною*** (*прямі паралельні*), яка має рівно один розв'язок — ***визначеною*** (*прямі перетинаються*), яка має більше одного — ***невизначеною*** (*прямі співпадають*).

Зауваження 2.1. *Якщо коефіцієнти у рівняннях системи (2.1) залежать від параметра, і ставиться питання про дослідження системи, це означає, що необхідно вказати значення параметра, при яких система несумісна, не визначена, визначена, і знайти її розв'язок.*

Зауваження 2.2. *Із літератури відомо (можна довести самостійно у якості приклада), що система (2.1):*

- ► *при* $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ *— має безліч розв'язків;*
- ► *при* $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ *— не має розв'язків;*
- ► *при* $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ *— має єдиний розв'язок;*

► *якщо* $b_1 = 0$ *або* $b_2 = 0$ *і* $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$ *— має єдиний розв'язок;*

► *якщо* $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$ *і* $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$, *то при* $\dfrac{c_1}{a_1} \neq \dfrac{c_2}{a_2}$ *не має розв'язків, а при* $\dfrac{c_1}{a_1} = \dfrac{c_2}{a_2}$ *система має безліч розв'язків.*

Останнім часом розвиток інформаційних технологій відкриває вчителям і викладачам широкі перспективи, які пов'язані з можливістю візуалізації розв'язань тих чи інших задач. Особливо важливе значення, на наш авторський погляд, цей момент має саме у розділі задач з параметрами. Тут буде доречно використовувати анімацію для візуалізації розв'язань рівнянь і нерівностей. На жаль, у друкованому виданні немає можливості продемонструвати наші авторські доробки, тому у деяких задачах ми наводимо стоп-кадри з рухомих графіків. Така візуалізація може суттєво допомогти вчителям і викладачам донести матеріал до слухача, а слухачеві — досягти належного розуміння.

Приклад 1. Для кожного значення параметра a розв'язати рівняння

$$(a-1)(a+2)x = a^3 + 2a^2.$$

Розв'язання. Контрольними є значення параметра a, при яких коефіцієнт при x дорівнює нулю, тобто

$$(a-1)(a+2) = 0 \Rightarrow a = 1, a = -2.$$

Далі дослідимо випадки, коли коефіцієнт при x дорівнює нулю і коли — відмінний від нуля.

► При $(a-1)(a+2) = 0$, матимемо:

• якщо $a = 1$ рівняння не має розв'язків, оскільки ліва частина дорівнює нулю, а права відмінна від нуля;

• якщо $a = -2$ рівнянню задовольняє будь-який $x \in \mathbb{R}$, оскільки рівняння приймає вигляд $0 \cdot x = 0$.

► При $(a-1)(a+2) \neq 0$, поділивши обидві частини рівняння на вираз $(a-1)(a+2)$, отримаємо

$$x = \frac{a^3 + 2a^2}{(a-1)(a+2)} = \frac{a^2(a+2)}{(a-1)(a+2)} = \frac{a^2}{a-1}.$$

Відповідь: якщо $a = 1$, то розв'язків немає;

якщо $a = -2$, то $x \in \mathbb{R}$;

якщо $a \neq 1, a \neq -2$, то $x = \dfrac{a^2}{a-1}$.

Приклад 2. Визначити, при якому значенні параметра a рівняння $(a-1)(a-5)x - 2(a+6) = 5x - 12$ не має розв'язків.

Розв'язання. Після розкриття дужок в лівій частині та приведення подібних, рівняння перетвориться до вигляду $(a^2 - 6a)x = 2a$.

► Якщо $a^2 - 6a = 0$, то рівняння $(a^2 - 6a)x = 2a$ не матиме розв'язку в разі, коли права частина не дорівнює 0, тобто при $2a \neq 0$. Цим умовам задовольняє значення параметра $a = 6$.

► Якщо $a^2 - 6a \neq 0$, то розв'язок рівняння існує і $x = \dfrac{2a}{a^2 - 6a} = \dfrac{2}{a-6}$.

Відповідь: $a = 6$.

Приклад 3. Для кожного значення параметра a розв'язати рівняння

$$\frac{2-a}{x} = \frac{a+1}{x-2}.$$

Розв'язання. Це рівняння не є лінійним, але при $x \neq 0$ і $x \neq 2$ приводиться до наступного лінійного виду

$$(2-a)(x-2) = (a+1)x \quad \text{або} \quad (1-2a)x = 2(2-a).$$

► Розглянемо випадок $1 - 2a = 0$, тобто $a = 0{,}5$. В цьому разі вихідне рівняння має вигляд $\dfrac{1{,}5}{x} = \dfrac{1{,}5}{x-2}$ або $x = x - 2$. Це рівняння не має розв'язків.

► При $a \neq 0{,}5$ множник при x відмінний від нуля. Поділивши обидві частини рівняння на $1 - 2a$, отримаємо $x = \dfrac{2(2-a)}{1-2a}$. Візьмімо до уваги обмеження, тобто $x = \dfrac{2(2-a)}{1-2a} \neq 0$ і $x = \dfrac{2(2-a)}{1-2a} \neq 2$.

З рівняння $\dfrac{2(2-a)}{1-2a} = 0$ отримуємо $a = 2$, а з $\dfrac{2(2-a)}{1-2a} = 2$ випливає $a = -1$. Отже, при значеннях параметра $a = 2$ і $a = -1$ рівняння не має розв'язку.

Відповідь: якщо $a \in \{-1;\ 0{,}5;\ 2\}$, то розв'язків немає;

при всіх інших значеннях параметра a, $x = \dfrac{2(2-a)}{1-2a}$.

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння

$$a^2(x-1) + 6x = (5x-2)a.$$

Розв'язання. Після деяких перетворень дане рівняння набуває вигляду

$$(a-2)(a-3)x = a(a-2).$$

Контрольними є значення параметра a, при яких коефіцієнт при x дорівнює нулю, тобто

$$(a-2)(a-3) = 0 \Longrightarrow a = 2, a = 3.$$

Дослідимо тепер випадки, коли коефіцієнт при x дорівнює нулю і коли — відмінний від нуля.

► При $(a-2)(a-3) = 0$, матимемо:

• якщо $a = 2$, то рівняння прийме вид $0 \cdot x = 0$, звідки випливає, що розв'язком рівняння є будь-яке дійсне число, тобто $x \in \mathbb{R}$;

• якщо $a = 3$, то рівняння прийме вид $0 \cdot x = 3$, звідки випливає, що $x \in \varnothing$, тобто розв'язків немає.

► При $(a-2)(a-3) \neq 0$, поділивши обидві частини рівняння на вираз $(a-2)(a-3)$, отримаємо

$$x = \frac{a(a-2)}{(a-2)(a-3)} = \frac{a}{a-3}.$$

Відповідь: якщо $a = 3$, то розв'язків немає;
якщо $a = 2$, то $x \in \mathbb{R}$;
якщо $a \neq 2, a \neq 3$, то $x = \dfrac{a}{a-3}$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $ax + 2x + 3 = 1 - x$ і визначити знаки коренів.

Розв'язання. Перетворимо рівняння до виду $(a+3)x = -2$.

Контрольним значенням параметра є $a = -3$.

► При $a = -3$, отримаємо $0 \cdot x = -2$, тобто $x \in \varnothing$.

▶ При $a \neq -3$, матимемо $x = -\dfrac{2}{a+3}$.

• Розв'язок буде додатним, якщо $x + 3 < 0$, тобто $x < -3$.

• Розв'язок буде від'ємним, якщо $x + 3 > 0$, тобто $x > -3$.

Відповідь: якщо $a = -3$, то $x \in \varnothing$;
якщо $a \neq -3$, то $x = -\dfrac{2}{a+3}$;
якщо $a < -3$, то $x > 0$;
якщо $a > -3$, то $x < 0$.

Приклад 6. Знайдіть всі значення параметра a, при кожному з яких корінь рівняння $3x(a + 4) = 6a + 35$ в три рази менше кореня рівняння $-2(x + 1) = 3(2 - x)$.

Розв'язання. Розв'яжемо спочатку рівняння $-2(x + 1) = 3(2 - x)$.

$$-2(x+1) = 3(2-x) \Rightarrow -2x - 2 = 6 - 3x \Rightarrow -2x + 3x = 6 + 2 \Rightarrow x = 8.$$

Якщо $x = 8$ — корінь рівняння $-2(x + 1) = 3(2 - x)$, то, згідно з умовою задачі, $x = \dfrac{8}{3}$ — корінь рівняння $3x(a + 4) = 6a + 35$.

Підставимо $x = \dfrac{8}{3}$ до рівняння $3x(a + 4) = 6a + 35$ і після деяких елементарних перетворень, остаточно отримаємо $a = \dfrac{3}{2}$.

Відповідь: $a = \dfrac{3}{2}$.

Приклад 7. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{5}{ax - 4} = \frac{1}{9x - a} \tag{2.2}$$

Розв'язання. Рівняння (2.2) не є лінійним, але при значеннях $x \neq \dfrac{4}{a}$ і $x \neq \dfrac{a}{9}$ (припустимі значення x і a, при яких загальний знаменник (2.2) не дорівнює нулю) після елементарних перетворень набуває вигляду

$$(45 - a)x = 5a - 4. \tag{2.3}$$

Знайдемо контрольні значення параметра a, при яких (2.2) і (2.3) не рівносильні або (2.2) не має числового змісту. Підставимо до рівняння (2.3)

$x = \dfrac{4}{a}$ і $x = \dfrac{a}{9}$.

При $x = \dfrac{4}{a}$, матимемо

$$(45 - a)\frac{4}{a} = 5a - 4 \Rightarrow 180 - 4a = 5a^2 - 4a \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a_{1,2} = \pm 6.$$

При $x = \dfrac{a}{9}$, матимемо

$$(45 - a)\frac{a}{9} = 5a - 4 \Rightarrow 45a - a^2 = 45a - 36 \Rightarrow -a^2 = -36 \Rightarrow a_{1,2} = \pm 6.$$

Отже, при $a = \pm 6$ рівняння (2.2) не має числового змісту, тобто $a = \pm 6$ — неприпустимі значення параметра a для (2.2).

▶ При $a = \pm 6$ рівняння (2.2) не має розв'язку.

▶ Розв'яжемо тепер рівняння (2.3). Контрольне значення параметра a отримаємо з умови $45 - a = 0$, тобто $a = 45$.

• При $a = 45$ рівняння набуває вигляду $0 \cdot x = 221$, звідки випливає, що $x \in \varnothing$, тобто розв'язків немає.

• При $a \neq 45$ рівняння (2.3), а разом з ним і рівняння (2.2) мають єдиний розв'язок $x = \dfrac{5a - 4}{45 - a}$.

Відповідь: якщо $a \neq \pm 6$ і $a \neq 45$, то $x = \dfrac{5a - 4}{45 - a}$;
якщо $a = \pm 6$ і $a = 45$, то $x \in \varnothing$.

Приклад 8. Знайти всі значення параметра m, при кожному з яких розв'язок рівняння $5x - 18m - 21 = 5mx - m$ більше 3.

Розв'язання. Спочатку розв'яжемо дане рівняння, користуючись міркуваннями, які були викладені в попередніх прикладах. Отже, після деяких елементарних перетворень вихідне рівняня матиме вигляд

$$(5 - 5m)x = 17m + 21.$$

▶ При $5 - 5m = 0 \Longrightarrow m = 1$ і останє рівняня перетворюється на $0 \cdot x = 38$, отже $x \in \varnothing$.

▶ При $5 - 5m \neq 0 \Longrightarrow m \neq 1$ і розв'язком рівняння є $x = \dfrac{17m + 21}{5 - 5m}$.

Знайдемо ті значення m, при яких розв'язок рівняння більше 3, тобто

розв'яжемо нерівність

$$\frac{17m+21}{5-5m} > 3.$$

Переносимо всі доданки в ліву частину і приводимо їх до спільного знаменника, остаточно отримаємо

$$\frac{16m+3}{1-m} > 0.$$

Далі застосуємо, вже відомий нам, метод інтервалів. Для цього знайдемо точки, в яких чисельник і знаменник обертаються в нуль. Це точки $m = -\frac{3}{16}$ і $m = 1$. Тепер будуємо «криві знаків» чисельника і знаменника (рис. 2.1).

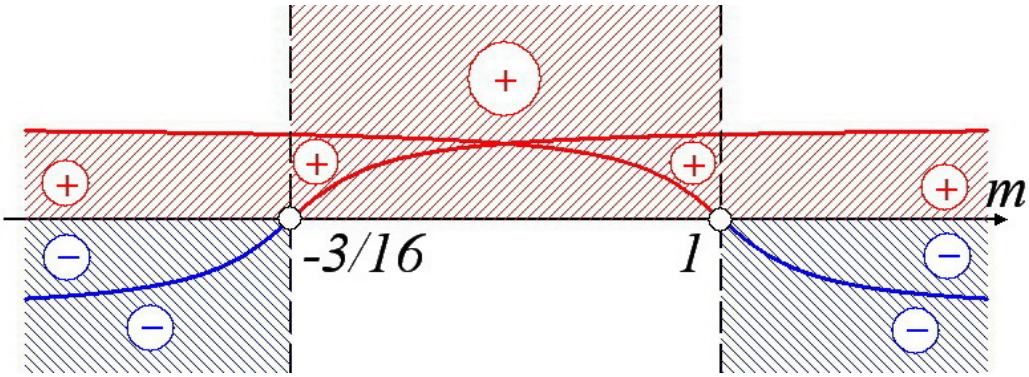


Рис. 2.1

З рис. 2.1 видно, що остання нерівність виконується при $m \in \left(-\frac{3}{16}; 1\right)$.

Відповідь: $m \in \left(-\frac{3}{16}; 1\right)$.

Приклад 9. Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність

$$a^2x \geq 4x + 2 - a.$$

Розв'язання. Перетворимо вихідну нерівність до вигляду

$$(a^2 - 4)x \geq 2 - a.$$

Контрольні значення параметра отримуємо з умови $a^2 - 4 = 0$, тобто $a = 2, a = -2$. Ці значення розбивають вісь Oa на три інтервали (рис. 2.2).

$$1) \quad a < -2; \qquad 2) \quad -2 < a < 2; \qquad 3) \quad a > 2.$$

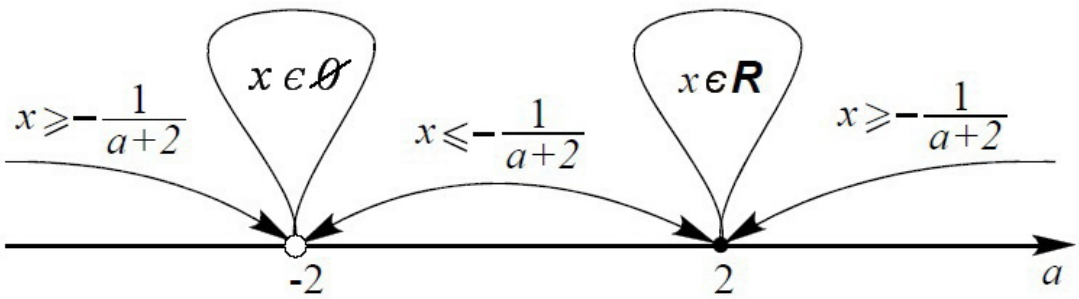


Рис. 2.2

На кожному з цих інтервалів розв'яжемо нерівність $(a^2-4)x \geq 2-a$. Значення $a=-2$ і $a=2$ вимагають окремого дослідження.

► При $a=-2$ нерівність має вигляд $0 \cdot x \geq 4$ і не має розв'язків.

► При $a=2$ маємо нерівність $0 \cdot x \geq 0$ і її розв'язком є будь-яке $x \in \mathbb{R}$.

• Якщо $a<-2$ або $a>2$, то $a^2-4>0$. У цьому разі $x \geq -\dfrac{1}{a+2}$.

• Якщо $-2<a<2$, то $a^2-4<0$ і $x \leq -\dfrac{1}{a+2}$.

Нанесемо одержані у ході розв'язування результати на відповідні інтервали числової осі Oa (рис. 2.2).

Відповідь: якщо $a<-2$, то $x \geq -\dfrac{1}{a+2}$;

якщо $-2<a<2$, то $x \leq -\dfrac{1}{a+2}$;

якщо $a>2$, то $x \geq -\dfrac{1}{a+2}$;

якщо $a=2$, то $x \in \mathbb{R}$;

якщо $a=-2$, то розв'язків немає.

Приклад 10. При яких значеннях параметра a нерівність $2x-a>0$ є наслідком нерівності $x+2a-3>0$?

Розв'язання. Спочатку розв'яжемо кожну нерівність.

$$1)\ 2x-a>0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x>a \quad \Leftrightarrow \quad x>\frac{a}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(\frac{a}{2};+\infty\right);$$

$$2)\ x+2a-3>0 \quad \Leftrightarrow \quad x>3-2a \quad \Leftrightarrow \quad x \in (3-2a;+\infty).$$

З **означення 1.5** випливає, що нерівність $2x - a > 0$ є наслідком нерівності $x + 2a - 3 > 0$, якщо множина розв'язків $x + 2a - 3 > 0$ міститься в множині розв'язків $2x - a > 0$. Це можливо, якщо

$$3 - 2a > \frac{a}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 6 - 4a > a \quad \Leftrightarrow \quad 5a < 6 \quad \Leftrightarrow \quad a < \frac{6}{5}.$$

Відповідь: $a \in \left(-\infty; \frac{6}{5}\right)$.

Приклад 11. При яких значеннях a нерівність $x \leq 2a + 3$ є вірною при всіх значеннях x, що задовольняють умові $-3 \leq x \leq -a - 2$?

Розв'язання. Скористаємося таким зауваженням.

Зауваження 2.3. *Розв'язок деякої нерівності буде вірним у вказаному інтервалі, коли цей інтервал міститься у множині розв'язків нерівності.*

Це означає, що у нашому випадку достатньо ровязати систему нерівностей:

$$\begin{cases} 2a + 3 \geq -a - 2, \\ -a - 2 \geq -3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a \geq -5, \\ -a \geq -1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq -\frac{5}{3}, \\ a \leq 1; \end{cases} \Rightarrow \quad a \in \left[-\frac{5}{3}; 1\right].$$

На осі Oa це можна відобразити, як на рис. 2.3.

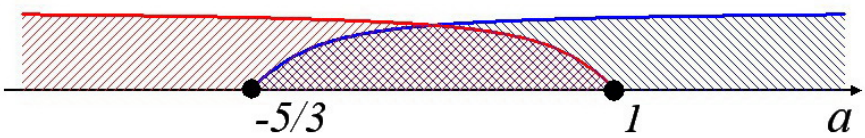


Рис. 2.3

Відповідь: $a \in \left[-\frac{5}{3}; 1\right]$.

Приклад 12. При яких значеннях k нерівність $(k - 1)x + 2k + 1 > 0$ є вірною при всіх значеннях x, що задовольняють умові $|x| \leq 3$?

Розв'язання. Розв'яжемо спочатку нашу нерівність, яку можна перетворити до вигляду $(k - 1)x > -2k - 1$.

Визначимо контрольне значення параметра k з умови $k-1=0$. Звідси $k=1$.

▶ При $k=1$ нерівність набуває вигляду $0\cdot x>-3$ і $x\in\mathbb{R}$.

▶ Якщо $k-1\neq 0$, то можливі варіанти, коли $k>1$ і $k>1$.

• При $k>1$ нерівність має розв'язок $x>\dfrac{2k+1}{1-k}$.

• При $k<1$ нерівність має розв'язок $x<\dfrac{2k+1}{1-k}$.

Далі діємо з урахуванням **зауваження 2.1.**

I. При $k=1$ множина розв'язків даної нерівності включає у себе відрізок $[-3;3]$.

II. Для того щоб відрізок $[-3;3]$ належав множині $x\in\left(\dfrac{2k+1}{1-k};+\infty\right)$, де $k>1$, достатньо, щоб виконувалася нерівність $\dfrac{2k+1}{1-k}<-3$.

Розв'язуємо цю нерівність:

$$\frac{2k+1}{1-k}<-3\Rightarrow\frac{2k+1}{1-k}+3<0\Rightarrow\frac{2k+1+3-3k}{1-k}<0\Rightarrow\quad\frac{4-k}{1-k}<0.$$

Застосуємо метод інтервалів. Чисельник обертається в нуль при $k=4$, а знаменник — при $k=1$. Об'єднаємо «криві знаків» чисельника і знаменника, і побудуємо на рис. 2.4 вже спільну криву.

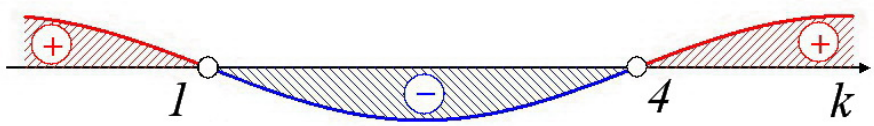


Рис. 2.4

З рис. 2.4 робимо висновок, що у даному випадку $k\in(1;4)$.

III. Аналогічно знайдемо, при яких значеннях $k<1$ відрізок $[-3;3]$ належить множині $x\in\left(-\infty;\dfrac{2k+1}{1-k}\right)$.

$$\frac{2k+1}{1-k}>3\Rightarrow\frac{2k+1}{1-k}-3>0\Rightarrow\frac{2k+1-3+3k}{1-k}>0\Rightarrow\quad\frac{5k-2}{1-k}>0.$$

Будуємо спільну «криву знаків» (рис. 2.5).

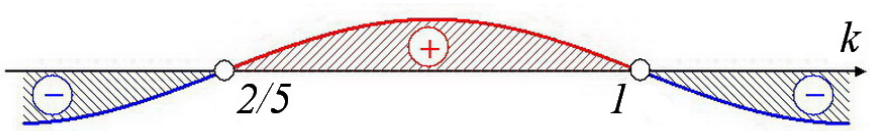


Рис. 2.5

З рис. 2.5 робимо висновок, що у даному випадку $k \in \left(\frac{2}{5}; 1\right)$.

Розв'язком вихідної задачі буде об'єднання розв'язків отриманих у **I, II, III.** Отже, остаточно матимемо $k \in \left(\frac{2}{5}; 4\right)$.

Відповідь: $k \in \left(\frac{2}{5}; 4\right)$.

Приклад 13. Визначити, при яких значеннях параметра a рівняння $x + ay = 1$ і $ax + y = 2a$ мають хоча б один спільний розв'язок.

Розв'язання. Розглянемо від супротивного. Знайдемо значення параметра a, при яких система рівнянь

$$\begin{cases} x + ay - 1 = 0, \\ ax + y - 2a = 0 \end{cases}$$

не має розв'язків. Це можливо (див. **зауваження 2.2**), якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, тобто

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{1} \neq \frac{1}{2a}. \tag{2.4}$$

З рівності $\frac{1}{a} = \frac{a}{1}$ знаходимо $a = \pm 1$. Для цих значень нерівність в (2.4) також виконується.

Відповідь: $a = \pm 1$.

Приклад 14. Дослідити систему лінійних рівнянь (див. **зауваження 2.1**).

$$\begin{cases} (a-2)x + 27y = 4{,}5, \\ 2x + (a+1)y = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Скористаємось **зауваженням 2.2** і визначимо значення параметра a при яких $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$, тобто $\dfrac{a-2}{2} = \dfrac{27}{a+1}$.

Розв'яжемо останнє рівняння:

$$\frac{a-2}{2} = \frac{27}{a+1} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - a - 56 = 0, \\ a + 1 \neq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = -7, \\ a = 8, \end{array} \right. \\ a \neq -1. \end{cases}$$

► Якщо $a = 8$ або $a = -7$, то наша система не має розвязків, оскільки

$$\frac{a-2}{2} = \frac{27}{a+1} \neq \frac{4{,}5}{3} \quad \left(\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \right).$$

► Якщо $a \neq 8$ або $a \neq -7$, то система матиме єдиний розв'язок, оскільки

$$\frac{a-2}{2} \neq \frac{27}{a+1} \quad \left(\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \right).$$

Знайдемо цей розв'язок.

$$\begin{cases} (a-2)x + 27y = 4{,}5 \quad \leftarrow \text{помножимо на } (-2), \\ 2x + (a+1)y = 3 \quad \leftarrow \text{помножимо на } (a-2); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2(a-2)x - 54y = -9, \\ 2(a-2)x + (a+1)(a-2)y = 3(a-2); \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{додамо ліві і праві} \\ \text{частини рівнянь} \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ((a-2)(a+1) - 54)y = 3(a-2) - 9 \Rightarrow y = \frac{3(a-5)}{(a-8)(a+7)}.$$

Змінну x можемо знайти використовуючи аналогічні перетворення або підставивши знайдений y до, наприклад, другого рівняння вихідної системи:

$$2x + (a+1)y = 3 \Rightarrow 2x + \frac{3(a-5)(a+1)}{(a-8)(a+7)} = 3 \Rightarrow 2x = 3 - \frac{3(a-5)(a+1)}{(a-8)(a+7)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{3(a-8)(a+7) - 3(a-5)(a+1)}{(a-8)(a+7)} \Rightarrow x = \frac{9(a-17)}{2(a-8)(a+7)}.$$

Відповідь: якщо $a = 8$ або $a = -7$, то розвязків немає;

якщо $a \neq 8$ або $a \neq -7$, то система має єдиний розв'язок $\left(\frac{9(a-17)}{2(a-8)(a+7)}; \frac{3(a-5)}{(a-8)(a+7)}\right)$.

Приклад 15. При яких значеннях a для будь-якого b знайдеться хоча б одне c таке, що рівняння $2x + by = ac^2 + c$ та $bx + 2y = c - 1$ мають хоча б один спільний розв'язок?

Розв'язання. Рівняння $2x + by = ac^2 + c$ та $bx + 2y = c - 1$ мають хоча б один спільний розв'язок, якщо має розв'язок система рівнянь

$$\begin{cases} 2x + by - ac^2 - c = 0, \\ bx + 2y - c + 1 = 0. \end{cases}$$

Можливі наступні варіанти (див. **зауваження 2.2**).

► *Система рівнянь має єдиний розв'язок.* В цьому випадку коефіцієнти при невідомих такі, що $\frac{2}{b} \neq \frac{b}{2}$, тобто $b \neq \pm 2$.

Отже, при $b \neq \pm 2$ система має розв'язок для будь-яких a і c.

► *Система рівнянь має безліч розв'язків.* Це можливо, якщо

$$\frac{2}{b} = \frac{b}{2} = \frac{ac^2 + c}{c - 1}.$$

• При $b = 2$ отримуємо умову $ac^2 + c = c - 1$ або $ac^2 = -1$. Отже, c знайдеться лише при

$$a < 0. \tag{2.5}$$

• При $b = -2$ маємо $ac^2 + c = 1 - c$ або $ac^2 + 2c - 1 = 0$. В цьому випадку c знайдеться, коли дискримінант рівняння $D = 4 + 4a \geq 0$, тобто при

$$a \geq -1. \tag{2.6}$$

Оскільки за умовою задачі необхідно знайти значення a, при яких існує хоча б одне c таке, що задані рівняння мають хоча б один спільний розв'язок для будь-якого b, то значення c знайдуться при одночасному виконанні умов (2.5) і (2.6), тобто при $-1 \leq a < 0$.

Відповідь: $a \in [-1; 0)$.

Приклад 16. Для кожного значення параметра a вкажіть кількість розв'язків $(x; y)$ системи рівнянь

$$\begin{cases} 3y - (a-2)x = 5, \\ 3ay + (3a-6)x = 10. \end{cases}$$

Розв'язання. Скористаємось **зауваженням 2.2** і визначимо значення параметра a при яких $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$, тобто $\dfrac{2-a}{3a-6} = \dfrac{3}{3a}$.

Розв'яжемо останнє рівняння:

$$\frac{2-a}{3a-6} = \frac{3}{3a} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + a - 6 = 0, \\ a \neq 0, \\ a \neq 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = -3, \\ a = 2, \end{array}\right. \\ a \neq 0, \\ a \neq 2. \end{cases}$$

► Якщо $a = 2$, то система матиме розв'язки $y = \dfrac{5}{3}$ при будь-якому x. Отже, при $a = 2$ система має безліч розв'язків.

► Якщо $a = -3$, то система не має розв'язків, оскільки

$$\frac{2-a}{3a-6} = \frac{3}{3a} \neq \frac{5}{10} \quad \left(\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}\right).$$

► Якщо $a \neq -3$ або $a \neq 2$, то система матиме єдиний розв'язок, оскільки

$$\frac{2-a}{3a-6} \neq \frac{3}{3a} \quad \left(\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}\right).$$

Відповідь: якщо $a = -3$, то розвязків немає;

якщо $a \neq -3$ або $a \neq 2$, то система має єдиний розв'язок;

якщо $a = 2$, то система має безліч розв'язків.

Приклад 17. Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} x + 1 \geq ax, \\ x > 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'яжемо спочатку окремо першу нерівність системи, яку можна переписати у вигляді $(a-1)x \leq 1$. Контрольним значенням параметра a, при якому коефіцієнт при x обертається в нуль буде $a = 1$.

- Якщо $a = 1$, то маємо нерівність $0 \cdot x \leq 1$, розв'язок якої $x \in \mathbb{R}$.
- Якщо $a < 1$, то $a - 1 < 0$ і маємо розв'язок $x \geq \dfrac{1}{a-1}$.
- Якщо $a > 1$, то $a - 1 > 0$ і маємо розв'язок $x \leq \dfrac{1}{a-1}$.

Розв'язок другої нерівності системи не залежить від значення параметра a і завжи $x > 2$.

Розв'язком системи нерівностей буде перетин розв'язків першої та другої нерівностей. Визначимо цей перетин залежно від значення параметра.

► Якщо $a = 1$, то розв'язок $x \in \mathbb{R}$ першої нерівності в перетині з розв'язком $x > 2$ другої нерівності дає інтервал $x \in (2; +\infty)$.

► Якщо $a < 1$, то $\dfrac{1}{a-1} < 0$ і розв'язок $x \geq \dfrac{1}{a-1}$ першої нерівності в перетині з розв'язком $x > 2$ другої нерівності дає інтервал $x \in (2; +\infty)$.

► Якщо $a > 1$, то $\dfrac{1}{a-1} > 0$ і необхідно розглянути три можливі випадки розташування точки $\dfrac{1}{a-1}$ відносно точки 2.

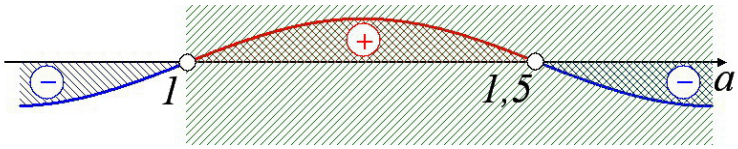


Рис. 2.6

I. Нехай $\dfrac{1}{a-1} > 2$, тоді $\dfrac{3-2a}{a-1} > 0$ і використовуючи спільну «криву знаків» (рис. 2.6) чисельника и знаменника, отримаємо значення параметра

$a \in (1; 1{,}5)$. Крім того, розв'язок системи нерівностей у цьому випадку $x \in \left(2; \dfrac{1}{a-1}\right]$.

II. Нехай $\dfrac{1}{a-1} = 2$, тоді $a = 1{,}5$ і система розв'язку не має, оскільки $x > 2$ і $x \leq 2$ не перетинаються.

III. Нехай $\dfrac{1}{a-1} < 2$, тоді $\dfrac{3-2a}{a-1} < 0$ і використовуючи спільну «криву знаків» (рис. 2.6) чисельника и знаменника (з урахуванням, що $a > 1$), отримаємо значення параметра $a \in (1{,}5; +\infty)$. У цьому випадку система також не має розв'язків, оскільки $x > 2$ і $x \leq \dfrac{1}{a-1} < 2$ не перетинаються.

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; 1]$, то $x \in (2; +\infty)$;

якщо $a \in (1; 1{,}5)$, то $x \in \left(2; \dfrac{1}{a-1}\right]$;

якщо $a \in [1{,}5; +\infty)$, то $x \in \varnothing$.

Приклад 18. При яких значеннях параметра a множина розв'язків системи $\begin{cases} 5x + 14 > 0, \\ 2x - a < 0 \end{cases}$ містить рівно 5 цілих розв'язків?

Розв'язання. Знайдемо розв'язок заданої системи, як перетин множин розв'язків першої та другої нерівностей системи:

$$\begin{cases} 5x + 14 > 0, \\ 2x - a < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x > -14, \\ 2x < a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2{,}8, \\ x < 0{,}5a, \end{cases} \Leftrightarrow -2{,}8 < x < 0{,}5a.$$

За умовою задачі, необхідно, щоб множина розв'язків системи містила рівно 5 цілих розв'язків. Це буде виконано, коли інтервал буде містити числа: $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ (рис. 2.7). Це означає, що $2 < 0{,}5a \leq 3$, тобто $4 < a \leq 6$.

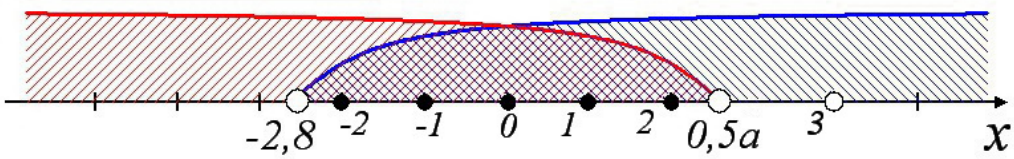


Рис. 2.7

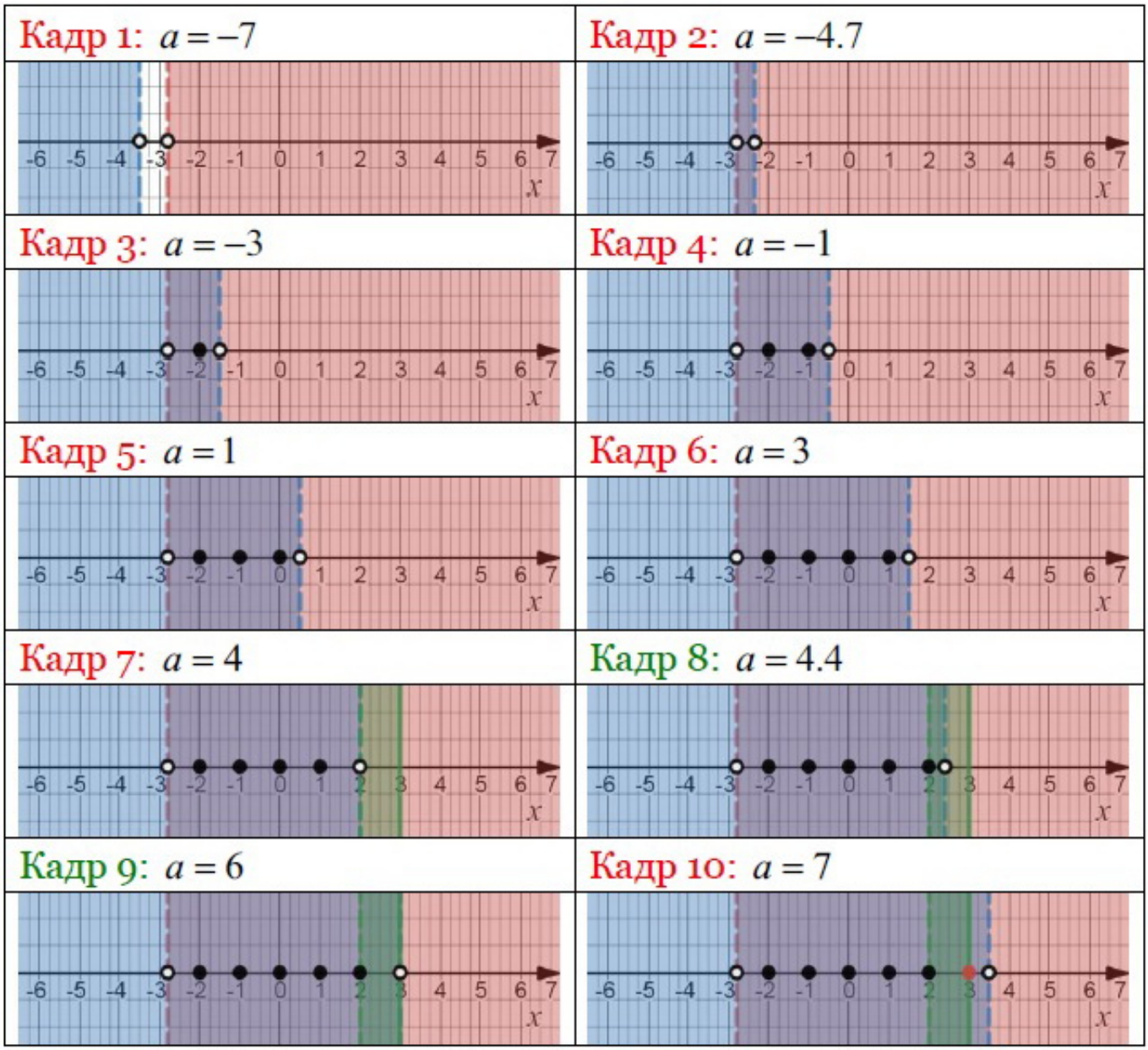


Рис. 2.8

Як вже зазначалося вище, для кращого розуміння суті питання, розв'язання цієї задачі можна подати у вигляді анімації (рухомого графіка). Стоп-кадри цієї анімації представлені на рис. 2.8. Червоний колір — розв'язання нерівності $x > -2{,}8$; синій — нерівності $x < 0{,}5a$; зелений — інтервал зміни величини $0{,}5a$, який забезпечує виконання обмеження на наявність рівно 5 цілих значень у множині розв'язків заданої системи.

Відповідь: $a \in (4; 6]$.

Приклад 19. При яких значеннях параметра a система

$$\begin{cases} (x-2)^2 - a > x(x+2) - 3, \\ 3x - 1 > x - (a - x) \end{cases}$$

не матиме розв'язків?

Розв'язання. Знайдемо розв'язок кожної з нерівностей системи:

$$1) \quad (x-2)^2 - a > x(x+2) - 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - a > x^2 + 2x - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x < 7 - a \Leftrightarrow x < \frac{7-a}{6}.$$

$$2) \quad 3x - 1 > x - (a - x) \Leftrightarrow 3x - 1 > x - a + x \Leftrightarrow x > 1 - a.$$

Задана система не матиме розв'язків, якщо множини розв'язків $x < \dfrac{7-a}{6}$ (червоний колір на рис. 2.9) і $x > 1 - a$ (синій колір на рис. 2.9) не перетинатимуться (не матимуть жодної спільної точки).

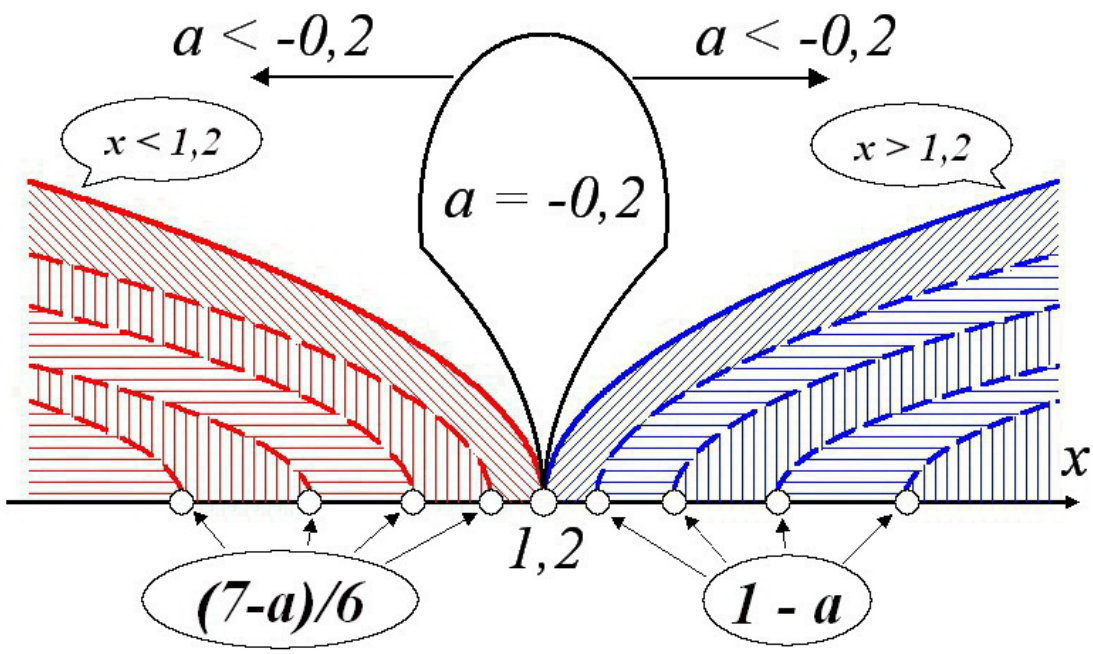


Рис. 2.9

Це можливо, коли $\dfrac{7-a}{6} \le 1-a$. Розв'яжемо останню нерівність:

$$\frac{7-a}{6} \le 1-a \Leftrightarrow 7-a \le 6-6a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5a \le -1 \Leftrightarrow a \le -0{,}2.$$

При $a=-0{,}2$ отримаємо $\dfrac{7-a}{6} = 1{,}2$ і $1-a=1{,}2$, тобто $1{,}2 < x < 1{,}2$. Стоп-кадри анімації розв'язання цієї задачі представлені на рис. 2.10.

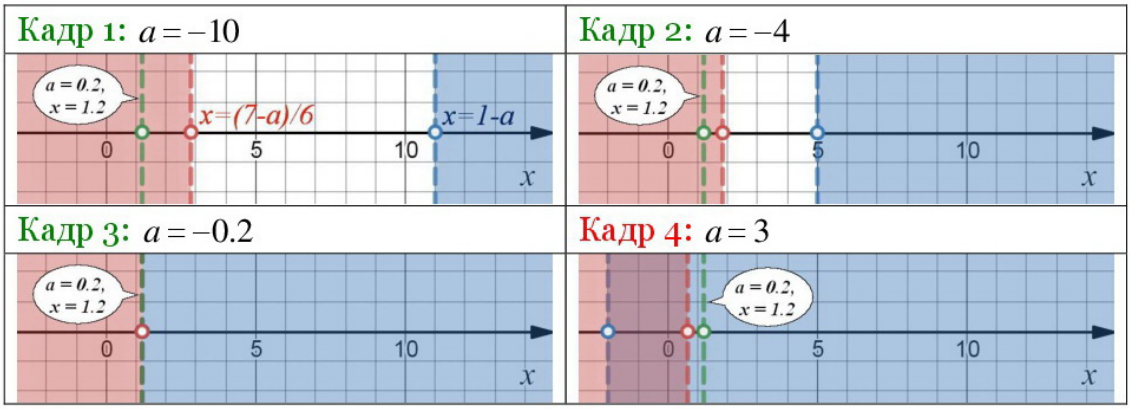


Рис. 2.10

Отже, система не матиме розв'язків при $a \le -0{,}2$.

Відповідь: $a \in (-\infty; -0{,}2]$.

Зауваження 2.4. *З наведених прикладів видно, що розв'язання рівнянь і нерівностей з параметром відрізняється від розв'язання рівнянь і нерівностей без параметра тим, що на всіх етапах розв'язування необхідно уважно стежити за кожною операцією з точки зору можливості її виконання при різних значеннях параметра, а також за тим, щоб отримані розв'язки не виходили за рамки припустимих значень змінної.*

Завдання для самостійної перевірки знань

1. Для кожного значення параметра a розв'язати рівняння:

а) $(a^2-4)x = 2-a$; б) $(a^3-2a^2)x = \dfrac{a-2}{a+1}$;

в) $3ax = a^2x - 3 + a$; г) $\dfrac{a^2-4}{x-3} = \dfrac{a^2-2a}{2x+4}$.

Відповідь: а) якщо $a = -2$, то розв'язків немає;

якщо $a = 2$, то $x \in \mathbb{R}$;

якщо $a \neq -2$ і $a \neq 2$, то $x = -\dfrac{1}{a+2}$;

б) якщо $a = 0$ і $a = -1$, то розв'язків немає;

якщо $a = 2$, то $x \in \mathbb{R}$;

при всіх інших значеннях параметра a, $x = \dfrac{1}{a^3 + a^2}$;

в) якщо $a = 0$, то розв'язків немає;

якщо $a = 3$, то $x \in \mathbb{R}$;

при всіх інших значеннях параметра a, $x = -\dfrac{1}{a}$;

г) якщо $a \in \{-4, -2, 0\}$, то розв'язків немає;

якщо $a = 2$, то $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 3) \cup (3; +\infty)$;

якщо $a \notin \{-4; -2; 2; 0\}$, то $x = -\dfrac{7a+8}{a+4}$.

2. Визначити, при якому значенні параметра a рівняння не мають розв'язків:

а) $(a^2 + 6a + 5)x - 2(a+6) = (a+5)x - 4$; б) $a^2x + 2ax + x = 1$.

Відповідь: а) $a = 0$ і $a = 5$; **б)** $a = -1$.

3. Для кожного значення параметра a розв'язати нерівності:

а) $(a-2)x > a+1$; б) $a(a-2)x \geq 2-a$;

в) $(a^2-4)x \geq (a-4)x + 1 - a$; г) $x - \dfrac{2(a-1)}{a} < \dfrac{2(x+1)}{3a}$.

Відповідь: а) якщо $a < 2$, то $x < \dfrac{a+1}{a-2}$;

якщо $a = 2$, то розв'язків немає;

якщо $a > 2$, то $x > \dfrac{a+1}{a-2}$;

б) якщо $a \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$, то $x \geq -\dfrac{1}{a}$;

якщо $a = 0$, то розв'язків немає;

якщо $a = 2$, то $x \in \mathbb{R}$;

якщо $a \in (0; 2)$, то $x \leq -\dfrac{1}{a}$;

в) якщо $a \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$, то $x \geq -\dfrac{1}{a}$;

якщо $a = 0$, то розв'язків немає;

якщо $a = 1$, то $x \in \mathbb{R}$;

якщо $a \in (0; 1)$, то $x \leq -\dfrac{1}{a}$;

г) якщо $a < 0$, то $x < 2$;

якщо $a = 0$, то розв'язків немає;

якщо $a \in \left(0; \dfrac{2}{3}\right)$, то $x > 2$;

якщо $a = \dfrac{2}{3}$, то розв'язків немає;

якщо $a > \dfrac{2}{3}$, то $x < 2$.

4. Розв'язати рівняння з параметром a:

а) $\left(\dfrac{25}{a} - a\right)x = a - \dfrac{5}{a} - 4$;

б) $(a^2 - 2a + 1)x = a^2 + 2a - 3$;

в) $(a^3 - a^2 - 4a + 4)x = a - 1$;

г) $\dfrac{ax}{3a - x} = 2$.

Відповідь: а) якщо $a = 5$, то $x \in \mathbb{R}$;

якщо $a = 0$ і $a = -5$, то розв'язків немає;

якщо $a \notin \{-5;\ 0;\ 5\}$, то $x = -\dfrac{a+1}{a+5}$;

б) якщо $a = 1$, то $x \in \mathbb{R}$;

якщо $a \neq 1$, то $x = \dfrac{a+3}{a-1}$.

в) якщо $a = 2$ і $a = -2$, то $x \in \varnothing$;

якщо $a = 1$, то $x \in \mathbb{R}$;

якщо $a \notin \{-2;\ 1;\ 2\}$, то $x = \dfrac{1}{a^2 - 4}$.

г) якщо $a = -2$ і $a = 0$, то $x \in \varnothing$;

якщо $a \neq -2$ і $a \neq 0$, то $x = \dfrac{6a}{a+2}$.

5. Знайти всі значення параметра b, при кожному з яких розв'язок рівняння $6 - 3b + 4bx = 4b + 12x$ менше 1.

Відповідь: $b \in (-2; 3)$.

6. Визначити значення параметра k, при яких корені рівняння

$$\frac{3}{8x - k} = \frac{1}{kx - 2}$$

додатні.

Відповідь: $k \in \left(\frac{8}{3}; 4\right) \cup (4; 6)$.

7. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких корінь рівняння $2x - 28{,}5 = 2a(6x-1)+35$ в два рази більше кореня рівняння $4x+1 = 2(3-2x)$

Відповідь: $a = -4\frac{9}{13}$.

8. Розв'язати рівняння $\frac{x-3m}{x^2-9} - \frac{2m+3}{x+3} = \frac{m-5}{x-3}$.

Відповідь: якщо $m \neq \frac{11}{3}, m \neq -\frac{5}{3}, m \neq 1$, то $x = \frac{8}{m-1}$;

якщо $m = \frac{11}{3}, m = -\frac{5}{3}, m = 1$, то $x \in \varnothing$.

9. Розв'язати нерівність $(a-2)(a-3)x \geq a(a-2)$.

Відповідь: якщо $a = 2$, то $x \in \mathbb{R}$;

якщо $a = 3$, то $x \in \varnothing$;

якщо $a \in (2; 3)$, то $x \leq \frac{a}{a-3}$;

якщо $a \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$, то $x \geq \frac{a}{a-3}$.

10. При яких значеннях a нерівність $3x - 2 > a - x + 4$ є наслідком нерівності $2x + a > 0$?

Відповідь: $a \in (-\infty; -2]$.

11. При яких значеннях a нерівність $2x - a + 4 < 0$ є вірною при всіх значеннях x, що задовольняють умові $3 \leq x \leq 5$?

Відповідь: $a \in (14; +\infty)$.

12. Розв'язати нерівність $\frac{3x+1}{a^2-1} - \frac{2x-1}{a-1} \leq \frac{x-1}{a+1}$.

Відповідь: якщо $a \in \left(-1; \frac{2}{3}\right) \cup (1; +\infty)$, то $x \in \left[\frac{2a+1}{3a-2}; +\infty\right)$;

якщо $a \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{2}{3}; 1\right)$, то $x \in \left(-\infty; \frac{2a+1}{3a-2}\right]$;

якщо $a = \frac{2}{3}$, то $x \in \mathbb{R}$.

13. При яких значеннях m не має розв'язків система рівнянь:

а) $\begin{cases} (m^2+4)x+my=7; \\ 4x+y=m? \end{cases}$ б) $\begin{cases} mx+3y=m^2+1, \\ (3m+14)x+(m+8)y=5m^2+5? \end{cases}$

Відповідь: а) $m=2$; **б)** $m=-6$.

14. Визначити, при яких значеннях a має безліч розв'язків система рівнянь

$$\begin{cases} 3x+ay=3, \\ ax+3y=3. \end{cases}$$

Відповідь: $a=3$.

15. Дослідити систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a^2x+(2-a)y=-4+a^3, \\ ax+(2a-1)y=2-2a^3. \end{cases}$$

Відповідь: якщо $a=-1$ або $a=1$, то розв'язків немає;

якщо $a=0$, то безліч розв'язків виду $(c;-2)$, де $c\in\mathbb{R}$;

якщо $a\notin\{-1;\ 0;\ 1\}$, то єдиний розв'язок

$$\left(\frac{3a^2-6}{2a^2-2};\ \frac{-2a^4-a^3+2a+4}{2a^2-2}\right).$$

16. Визначити, при яких значеннях a для будь-якого b знайдеться хоча б одне c таке, що система

$$\begin{cases} x+by=ac^2+c, \\ bx+2y=c-1 \end{cases}$$

має хоча б один розв'язок.

Відповідь: $a\in\left[-\dfrac{3\sqrt{2}+4}{8};\ \dfrac{3\sqrt{2}-4}{8}\right]$.

17. При яких значеннях параметра a система нерівностей

$$\begin{cases} 2(3x-a)\le 3(4x-a)+20, \\ 4(a+x)\le 3x+5 \end{cases}$$

матиме розв'язок?

Відповідь: $a \leq 2$.

18. При яких значеннях параметра m система нерівностей

$$\begin{cases} 4 + x > 1, \\ x - 5 < m - 2 \end{cases}$$

має рівно три цілих розв'язки?

Відповідь: $-3 < m \leq -2$.

2.2. Квадратні рівняння і нерівності

2.2.1. Необхідні і достатні умови розташування коренів квадратного тричлена

Квадратним тричленом називають вираз $ax^2 + bx + c$, де $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ і $a \neq 0$. Графік квадратного тричлена — ***парабола***. Пряма $x = -\dfrac{b}{2a}$ — її ***вісь симетрії***. Точка $(x_{\text{в}}; y_{\text{в}})$ — ***вершина параболи***, де $x_{\text{в}} = -\dfrac{b}{2a},\ y_{\text{в}} = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$. Число $D = b^2 - 4ac$ — ***дискримінант***. Абсциси точок перетину параболи з віссю Ox є коренями квадратного тричлена, тобто розв'язками квадратного рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{2.7}$$

і обчислюються за допомогою формули

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad (x_1 \leq x_2). \tag{2.8}$$

Будь-який квадратний тричлен (квадратична функція) $f(x) = ax^2 + bx + c$ може бути розкладений на множники за формулою

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \tag{2.9}$$

або представлений у вигляді

$$f(x) = a(x - x_{\text{в}})^2 + y_{\text{в}}. \tag{2.10}$$

Теорема 2.1 (**про знак квадратичної функції**). *Нехай квадратична функція має вигляд* $f(x) = ax^2 + bx + c$, *де* a, b, c — *вирази, що залежать від параметра або числа, причому* $a \neq 0$. *Тоді*

► *якщо* $D < 0$, *то рівняння (2.7) не має дійсних коренів (парабола не перетинає вісь* Ox*) і знак* $f(x)$ *при всіх* $x \in \mathbb{R}$ *співпадає зі знаком* a, *тобто* $af(x) > 0$ *(параболи 3 і 5 на рис. 2.11);*

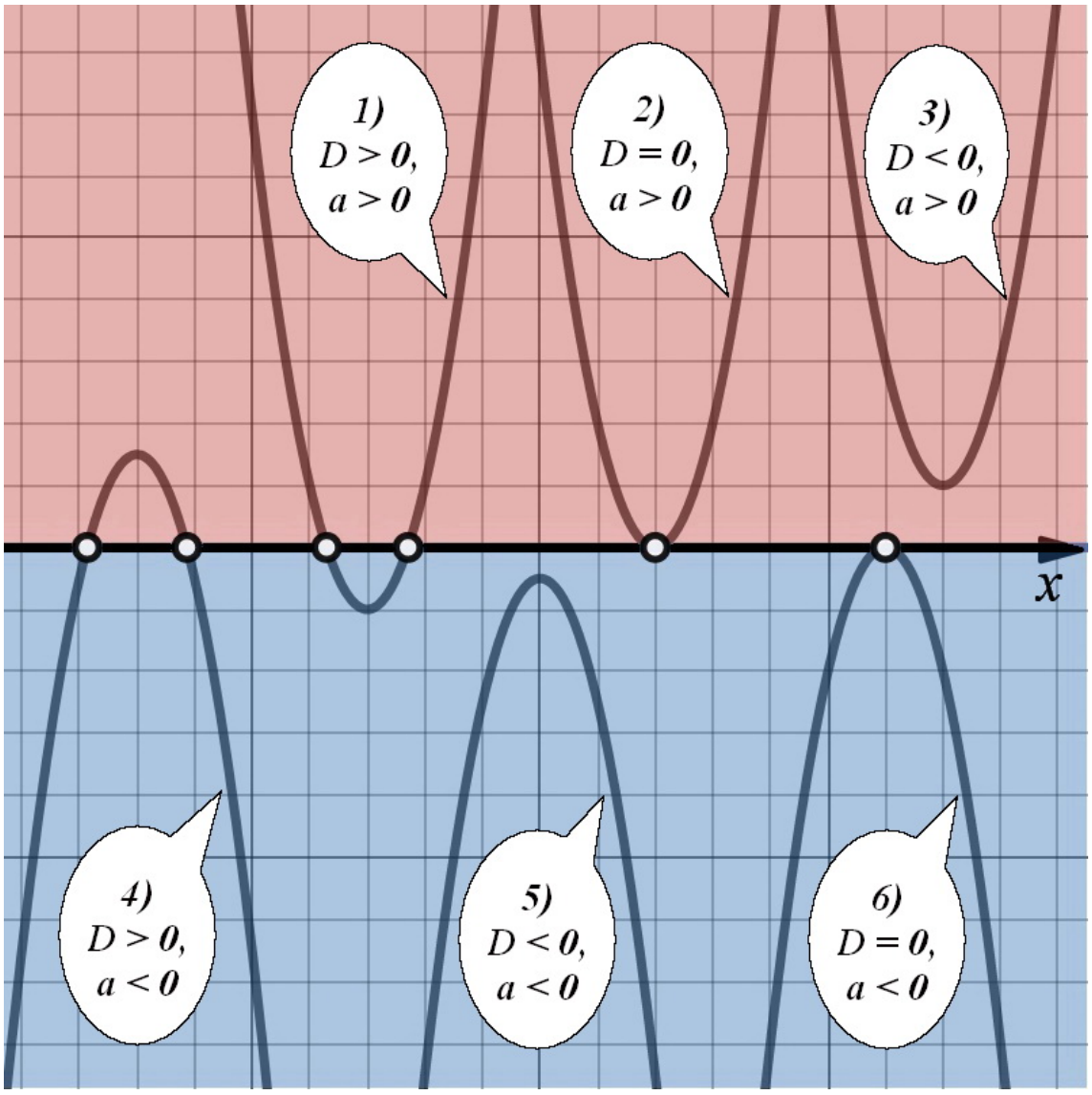


Рис. 2.11

► *якщо* $D = 0$, *то рівняння* (2.7) *має один дійсний корінь* $x_1 = x_2 = x_в$ *(парабола дотикається осі* Ox *в цій точці) і знак* $f(x)$ *при всіх* $x \in \mathbb{R}$ *крім* $x_в$ *співпадає зі знаком* a, *тобто* $\left[\begin{array}{ll} af(x) > 0, & \text{при } x \neq x_в; \\ af(x) = 0, & \text{при } x = x_в \end{array}\right.$ *(параболи 2 і 6 на рис.* 2.11*);*

► *якщо* $D > 0$ *рівняння* (2.7) *має два дійсних кореня* (2.8) *(парабола перетинає вісь* Ox *в двох точках* x_1 *і* x_2*) і знак* $f(x)$ *при всіх* $x \in (x_1; x_2)$ *протилежний знаку* a, *а при всіх* $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ *співпадає зі знаком* a, *тобто* $\left[\begin{array}{ll} af(x) < 0, & \text{при } x \in (x_1; x_2); \\ af(x) > 0, & \text{при } x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty) \end{array}\right.$ *(параболи 1 і 4 на рис.* 2.11*).*

При розв'язуванні рівняння (2.7) ***контрольним*** значенням параметра є $a = 0$, оскільки в цьому випадку рівняння стає лінійним.

Множина значень квадратичної функції $f(x) = ax^2 + bx + c$:
$E_f = [y_в; +\infty)$ при $a > 0$ і $E_f = (-\infty; y_в]$ при $a < 0$.

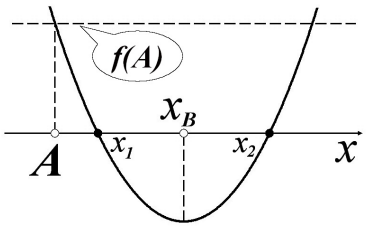
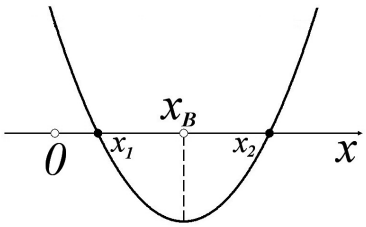
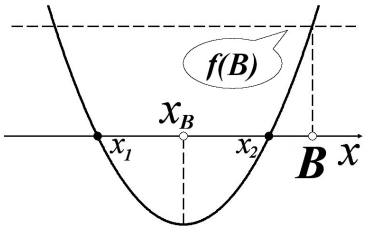
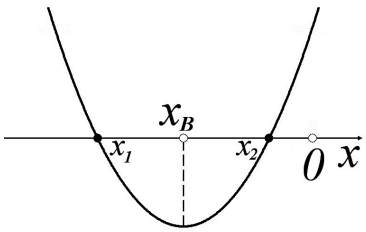
Якщо $a > 0$, то ***найменше значення*** $\min f(x) = y_в$; якщо $a < 0$, то ***найбільше значення*** $\max f(x) = y_в$.

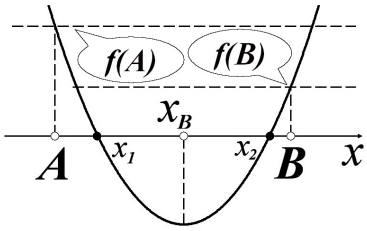
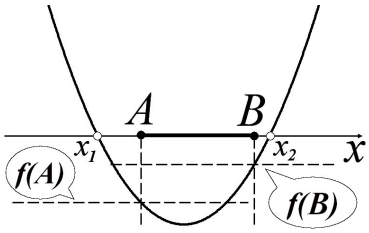
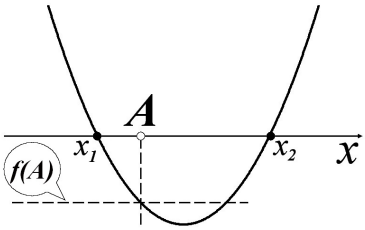
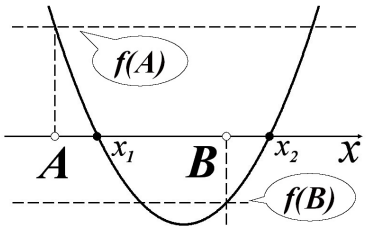
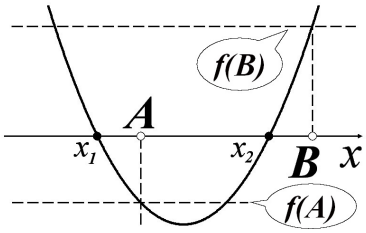
Існує досить великий клас задач з параметром, в яких необхідно враховувати обмеження на корені квадратичної функції $f(x) = ax^2 + bx + c$ (наприклад: обидва кореня більше -3, тільки один корінь належить відрізку $[-5;\ 4]$ і т.д.). У таких випадках доцільно дотримуватися наступного плану.

► Якщо дискримінант квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ є повним квадратом, то краще знайти корені рівняння і далі працювати з цими коренями (скласти відповідні нерівності).

► Якщо дискримінант квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ не є повним квадратом, то корені рівняння краще не знаходити, а необхідні обмеження скласти у вигляді системи раціональних нерівностей на основі ***теорем про необхідні і достатні умови,*** які наведені у вигляді табл. 2.1. Оскільки всі умови виводяться як наслідки **теореми 2.1**, то немає необхідності будувати параболи гілками вниз, тому що саме формулювання теореми враховує обидва випадки.

Табл. 2.1. Необхідні і достатні умови розташування коренів $f(x) = ax^2+bx+c$

№ з/п	**Обмеження на розташування коренів квадратичної функції** $f(x) = ax^2 + bx + c$	**Ескіз графіка квадратичної функції** $f(x) = ax^2 + bx + c$	**Необхідна і достатня умова для наведеного розташування графіка**
Т.1.	Обидва кореня більше заданого числа A, тобто $x_1 > A, x_2 > A$		$\begin{cases} D \geq 0, \\ af(A) > 0, \\ x_{\text{в}} > A. \end{cases}$
Т.2.	Обидва кореня додатні, тобто $x_1 > 0, x_2 > 0$		З теореми Вієта: $\begin{cases} D \geq 0, \\ x_1 + x_2 > 0, \\ x_1 \cdot x_2 > 0. \end{cases}$
Т.3.	Обидва кореня не перевищують заданого числа B, тобто $x_1 \leq B, x_2 \leq B$		$\begin{cases} D \geq 0, \\ af(B) > 0, \\ x_{\text{в}} < B. \end{cases}$
Т.4.	Обидва кореня від'ємні, тобто $x_1 < 0, x_2 < 0$		З теореми Вієта: $\begin{cases} D \geq 0, \\ x_1 + x_2 < 0, \\ x_1 \cdot x_2 > 0. \end{cases}$

Т.5.	Обидва кореня лежать в інтервалі $(A; B)$, тобто $x_{1,2} \in (A; B)$		$\begin{cases} D \geq 0, \\ af(A) > 0, \\ af(B) > 0, \\ A < x_{\text{в}} < B. \end{cases}$
Т.6.	Відрізок $[A; B]$ лежить між коренями, тобто $[A; B] \in (x_1; x_2)$		$\begin{cases} af(A) < 0, \\ af(B) < 0. \end{cases}$
Т.7.	Задане число A лежить між коренями, тобто $x_1 < A < x_2$		$af(A) < 0.$
Т.8.	Тільки менший корінь входить в інтервал $(A; B)$		$\begin{cases} af(A) < 0, \\ af(B) < 0. \end{cases}$
Т.9.	Тільки більший корінь входить в інтервал $(A; B)$		$\begin{cases} af(A) < 0, \\ af(B) > 0. \end{cases}$

Зауваження 2.5. *Немає необхідності запам'ятати всі наведені у табл. 2.1 випадки. Досить при записі необхідних і достатніх умов вміти користуватися графічним представленням задачі.*

2.2.2. Розв'язання типових задач

Найбільш розповсюдженим типом задач з параметрами, що пов'язані з квадратним тричленом, є задачі про визначення коренів квадратного рівняння, коефіцієнти якого залежать від параметра. При їх розв'язуванні використовується формула (2.8) і досліджується дискримінант. Окремо необхідно розглядати випадок, коли коефіцієнт при x^2 дорівнює нулю і рівняння не є квадратним, формула (2.8) при цьому непридатна.

Для квадратичних нерівностей, виходячи з **теореми 2.1 (про знак квадратичної функції)**, буде справедливим наступне твердження.

Нехай квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ з коефіцієнтом $a > 0$ має дискримінант D. Тоді

► якщо $D > 0$, то

- розв'язком нерівності $ax^2 + bx + c < 0$ є множина $x \in (x_1; x_2)$, де $x_1,\ x_2$ — корені тричлена, причому $x_1 < x_2$;
- розв'язком нерівності $ax^2 + bx + c \leq 0$ є множина $x \in [x_1; x_2]$, де $x_1,\ x_2$ — корені тричлена, причому $x_1 < x_2$;
- нерівність $ax^2 + bx + c > 0$ має розв'язок $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$, де $x_1,\ x_2$ — корені тричлена, причому $x_1 < x_2$;
- нерівність $ax^2 + bx + c \geq 0$ має розв'язок $x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$, де $x_1,\ x_2$ — корені тричлена, причому $x_1 < x_2$;

► якщо $D = 0$, то

- розв'язком нерівності $ax^2 + bx + c < 0$ є $x \in \varnothing$;
- розв'язком нерівності $ax^2 + bx + c \leq 0$ є $x \in \{x_в\}$, де $x_в = -\dfrac{b}{2a}$ — вершина параболи;
- нерівність $ax^2 + bx + c > 0$ має розв'язок $x \in (-\infty; x_в) \cup (x_в; +\infty)$, де $x_в = -\dfrac{b}{2a}$ — вершина параболи;
- нерівність $ax^2 + bx + c \geq 0$ має розв'язок $x \in \mathbb{R}$;

► якщо $D < 0$, то для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $ax^2 + bx + c > 0$.

При $a < 0$ множенням обох частин нерівності на (-1) вона приводиться до однієї з нерівностей, розглянутих вище.

При розв'язуванні квадратичних нерівностей з коефіцієнтами, що залежать від параметра, іноді буває корисно використовувати метод графічної інтерпретації. Як вже зазначалося вище, відповідь задачі повинна містити розв'язки для всіх значень параметра в порядку зростання його від $-\infty$ до $+\infty$. Для компактності відповіді можливе об'єднання інтервалів для параметра, на яких формули розв'язку співпадають.

Приклад 1. Розв'язати рівняння з параметром $x^2 - 2x + a = 0$.

Розв'язання. Кількість коренів квадратного рівняння залежить від значення дискримінанта. Тому розв'язування задачі буде пов'язано з аналізом (дослідженням) значень дискримінанту даного рівняння.

Отже, $D = b^2 - 4ac = 4 - 4a = 4(1 - a)$. Тоді за формулою (2.8) матимо корені $x_{1,2} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{1-a}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-a}$.

Можливі такі випадки:

▶ $D < 0 \Rightarrow 1 - a < 0 \Rightarrow a > 1$. У цьому випадку рівняння не має дійсних коренів.

▶ $D = 0 \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$. У цьому випадку отримаємо один (два рівних) дійсний корінь $x = 1$.

▶ $D > 0 \Rightarrow 1 - a > 0 \Rightarrow a < 1$, тобто рівняння має два різних дійсних корені $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-a}$.

Відповідь: якщо $a > 1$, то розв'язків немає;
якщо $a = 1$, то $x = 1$;
якщо $a < 1$, то $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-a}$.

Приклад 2. Для кожного дійсного значення параметра a розв'язати квадратне рівняння $ax^2 - 2x + 1 = 0$.

Розв'язання. При $a = 0$ вихідне рівняння є лінійним і має вигляд $2x + 1 = 0$. У цьому випадку число $x = -0{,}5$ — його корінь.

При $a \neq 0$ вихідне рівняння є квадратним. Його дискримінант $D = b^2 - 4ac = 4 - 4a = 4(1 - a)$.

▶ $D < 0 \Rightarrow 1 - a < 0 \Rightarrow a > 1$. У цьому випадку рівняння не має дійсних коренів.

▶ $D = 0 \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$. У цьому випадку за формулою (2.8)

отримаємо один дійсний корінь $x = -1$.

▶ $D > 0 \Rightarrow 1 - a > 0 \Rightarrow a < 1$, тобто за формулою (2.8) рівняння має два різних дійсних корені $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{a}$.

Відповідь: якщо $a > 1$, то розв'язків немає;

якщо $a = 1$, то $x = -1$;

якщо $a = 0$, то $x = -0{,}5$;

якщо $a < 1$, то $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{a}$.

Приклад 3. При яких значеннях параметра k квадратний тричлен $y = (k-1)x^2 + (k+4)x + k + 7$ можна представити у вигляді повного квадрата?

Розв'язання. Квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ можна представити у вигляді повного квадрата $a(x - x_{\text{в}})^2$ за формулою (2.10), якщо його корені рівні, тобто $x_1 = x_2 = x_{\text{в}}$. Це можливо, коли $D = 0$. У даному випадку $D = (k+4)^2 - 4(k-1)(k+7)$. Розв'язуємо рівняння:

$$(k+4)^2 - 4(k-1)(k+7) = 0 \Rightarrow k^2 + 8k + 16 - 4k^2 - 24k + 28 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3k^2 + 16k - 44 = 0 \Rightarrow k_1 = -\frac{22}{3}, k_2 = 2.$$

Відповідь: $k_1 = -\dfrac{22}{3}, k_2 = 2$.

Приклад 4. Розв'язати нерівість $ax^2 > a$.

Розв'язання. Виконаємо деякі перетворення:

$$ax^2 > a \Leftrightarrow ax^2 - a > 0 \Leftrightarrow a(x^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow a(x-1)(x+1) > 0.$$

Розглянемо три випадки.

• При $a = 0$ нерівність набуває вигляду $0 \cdot x > 0$, тобто розв'язків немає.

• При $a > 0$ розділимо обидві частини нерівності на a (знак нерівності при цьому зберігається): $(x-1)(x+1) > 0$. Користуючись методом інтервалів, побудуємо «криву знаків» (рис. 2.12). Контрольні точки у цьому випадку — нули лівої частини нашої нерівності, тобто $x = -1$, $x = 1$. З рис. 2.12 видно, що нерівність виконується при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

• При $a < 0$ розділимо обидві частини нерівності на a, змінивши при

цьому знак « > » на « < » : $(x-1)(x+1)<0$.

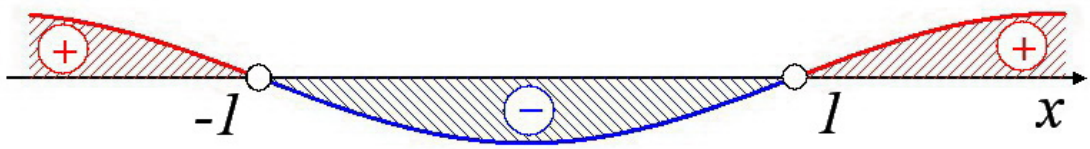


Рис. 2.12

З рис. 2.12 для цього випадку матимемо, що $x \in (-1;1)$

Відповідь: якщо $a=0$, то розв'язків немає;

якщо $a>0$, то $x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$;

якщо $a<0$, то $x \in (-1;1)$.

Приклад 5. Розв'язати нерівність $x^2-4a^2 \geq 0$.

Розв'язання. Застосуємо до вихідної нерівності формулу різниці квадратів: $(x-2a)(x+2a) \geq 0$. Далі все буде залежати від доданків $-2a$ і $2a$. Порівняємо їх.

• Якщо $-2a<2a$, то у цьому разі $a>0$ і «крива знаків» матиме вигляд, як на рис. 2.13, звідки $x \in (-\infty;-2a] \cup [2a;+\infty)$.

• При $-2a>2a$ параметр повинен бути від'ємним, тобто $a<0$. «Крива знаків» для цього випадку побудована на рис. 2.14, звідки $x \in (-\infty;2a] \cup [-2a;+\infty)$.

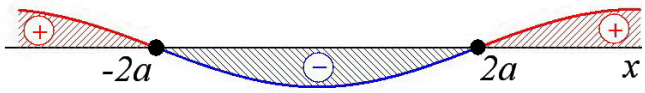


Рис. 2.13

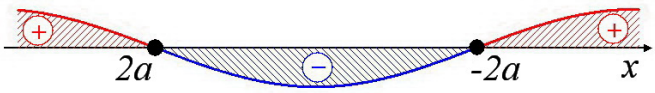


Рис. 2.14

• Якщо $-2a=2a$, то це можливо тільки при $a=0$. Нерівність набуде вигляду $x^2 \geq 0$, звідки $x \in \mathbb{R}$.

Відповідь: якщо $a=0$, то $x \in \mathbb{R}$;

якщо $a>0$, то $x \in (-\infty;-2a] \cup [2a;+\infty)$;

якщо $a<0$, то $x \in (-\infty;2a] \cup [-2a;+\infty)$.

Приклад 6. Для всіх a розв'язати нерівність: $x^2 + ax + 1 > 0$.

Розв'язання. Обчислимо дискримінант: $D = a^2 - 4$.

Розглянемо наступні випадки.

▶ Якщо $D < 0$, тобто $a^2-4 < 0 \Leftrightarrow (a+2)(a-2) < 0 \Rightarrow a \in (-2; 2)$ («крива знаків» на рис. 2.15), то квадратний тричлен не має дійсних коренів (точок перетину з віссю Ox) і оскільки коефіцієнт при x^2 додатний, то нерівність $x^2 + ax + 1 > 0$ виконуються при будь-якому $x \in \mathbb{R}$ (парабола 3 на рис. 2.11).

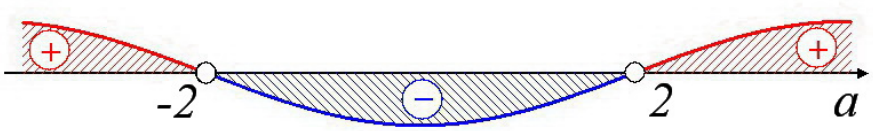


Рис. 2.15

▶ Якщо $D = 0$, тобто $a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (a + 2)(a - 2) = 0 \Rightarrow a = \pm 2$, то квадратний тричлен має один дісний корінь $x_в$ (парабола дотикається осі Ox в цій точці) і оскільки коефіцієнт при x^2 додатний, то нерівність $x^2+ax+1 > 0$ виконуються при будь-якому x за виключенням $x_в$ (парабола 2 на рис. 2.11). Отже,

• при $a = -2$, матимемо нерівність $x^2-2x+1 > 0$, звідки $x_в = x_1 = x_2 = 1$ і розв'язок $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$;

• при $a = 2$, матимемо нерівність $x^2 + 2x + 1 > 0$, звідки $x_в = x_1 = x_2 = -1$, а розв'язок $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

▶ Якщо $D > 0$, тобто $a^2 - 4 > 0 \Rightarrow a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ («крива знаків» на рис. 2.15), то квадратний тричлен має два дійсних кореня $x_{1,2} = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ (парабола перетинає вісь Ox в цих точках — парабола 1 на рис. 2.11) і нерівність $x^2 + ax + 1 > 0$ виконується при $x \in \left(-\infty; \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}; +\infty\right)$.

Для наочності наведемо стоп-кадри рухомого графіка розв'язання цієї задачі (рис. 2.16).

Відповідь: якщо $a \in (-2; 2)$, то $x \in \mathbb{R}$;

якщо $a = -2$, то $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$;

якщо $a = 2$, то $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$;

якщо $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, то

$$x \in \left(-\infty; \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right) \cup \left(\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}; +\infty\right).$$

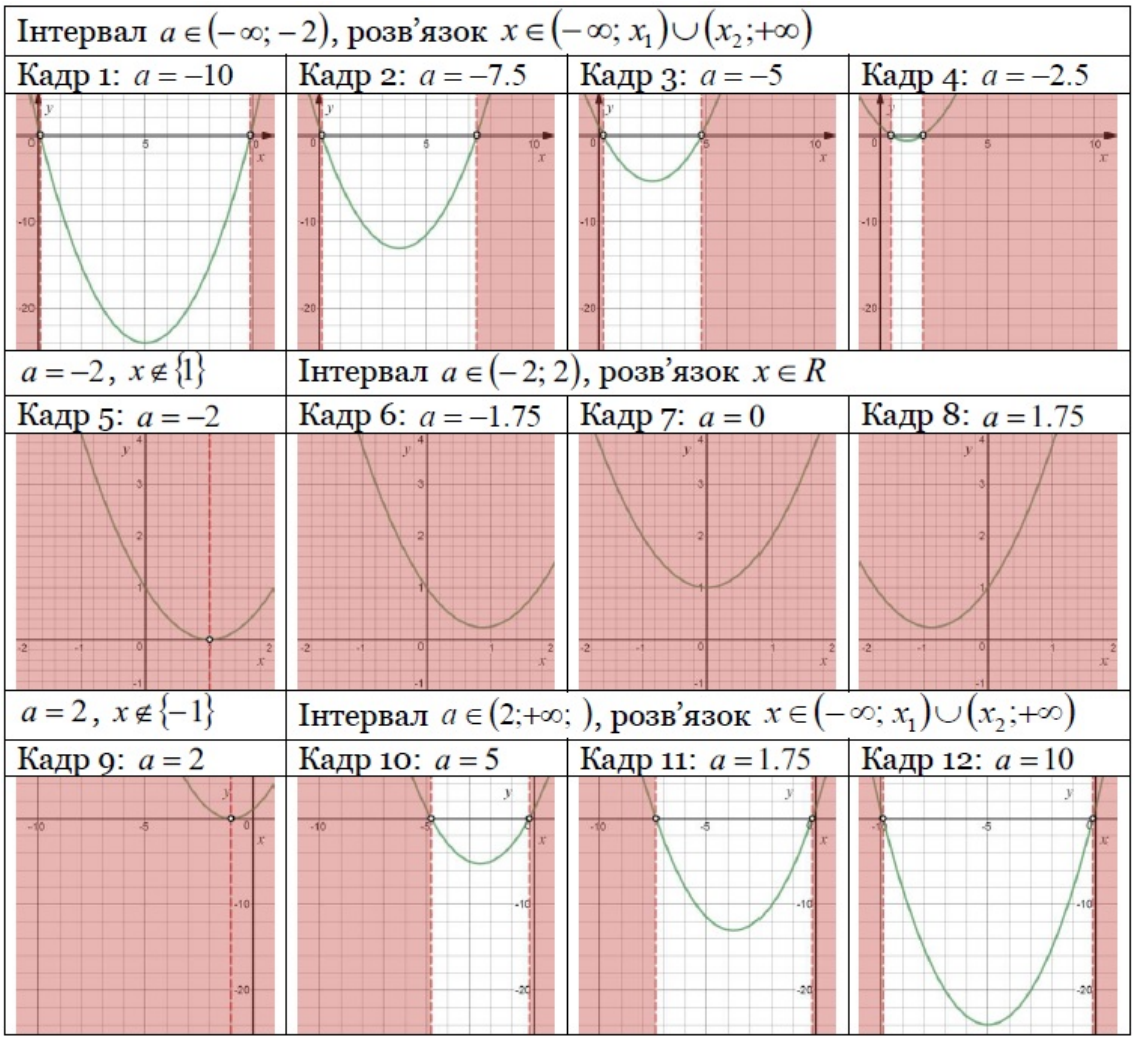


Рис. 2.16

Приклад 7. Розв'язати рівняння $x^2 + 2x - 8 - a(x - 4) = 0$.

Розв'язання. Перетворимо задане рівняння:

$$x^2+2x-8-a(x-4) = 0 \Leftrightarrow x^2+2x-8-ax+4a = 0 \Leftrightarrow x^2+(2-a)x+4a-8 = 0.$$

Обчислимо дискримінант: $D = (2 - a)^2 - 4(4a - 8) = a^2 - 20a + 36$.

Як і раніше, перейдемо до дослідження можливих значень дискримінанту.

► Якщо $D < 0$, то рівняння не має дійсних коренів, тобто $x \in \varnothing$. Визначимо значення параметра з розв'язання нерівності: $a^2 - 20a + 36 < 0$, звідки матимемо корені $a_1 = 2$ і $a_2 = 18$ і відповідну «криву знаків» на рис. 2.17. Тобто $a \in (2; 18)$.

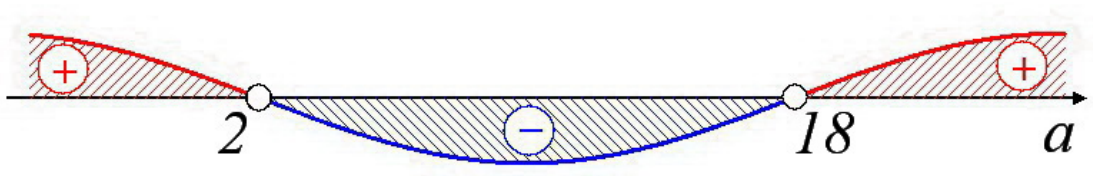


Рис. 2.17

► Якщо $D = 0$, тобто $a^2 - 20a + 36 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 2$ і $a_2 = 18$, то квадратний тричлен має один дісний корінь $x = x_1 = x_2 = \dfrac{a-2}{2}$.

• При $a = 2$ отримаємо $x = 0$.

• При $a = 18$ матимемо $x = 8$.

► Якщо $D > 0$, то рівняння має два дійсних кореня

$$x_{1,2} = \frac{a - 2 \pm \sqrt{a^2 - 20a + 36}}{2}.$$

Залишається визначити значення параметра a з розв'язання нерівності: $a^2 - 20a + 36 > 0$, звідки матимемо корені $a_1 = 2$ і $a_2 = 18$ і відповідну «криву знаків» на рис. 2.17. Тобто $a \in (-\infty; 2) \cup (18; +\infty)$.

Відповідь: якщо $a \in (2; 18)$, то $x \in \varnothing$;

якщо $a = 2$, то $x = 0$;

якщо $a = 18$, то $x = 8$;

якщо $a \in (-\infty; 2) \cup (18; +\infty)$, то

$$x_{1,2} = \frac{a - 2 \pm \sqrt{a^2 - 20a + 36}}{2}.$$

Приклад 8. Знайти всі значення a, при кожному з яких рівняння $ax^2 - 2x + a = 0$ має рівно один корінь. Для кожного такого a вказати цей корінь.

Розв'язання. Було б неправильно відразу знайти дискримінант і прирівняти його до нуля. Справа в тому, що дане рівняння не при всіх значеннях параметра a є квадратним. Тому спочатку необхідно досліджувати випадок, коли рівняння буде лінійним і тільки потім переходити до розгляду дискримінанту квадратного рівняння.

▶ Якщо $a = 0$, то рівняння набуває вигляду $-2x = 0$, тобто стає лінійним. Його корінь $x = 0$.

▶ Якщо $a \neq 0$, то рівняння є квадратним. Його дискримінант $D = 4-4a^2$ або $D = 4(1-a^2)$ буде дорівнювати нулю при $\left[\begin{array}{l} 1-a=0, \\ 1+a=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = 1, \\ a_2 = -1, \end{array}\right.$ причому, якщо $a = -1$, то $x = -\dfrac{b}{2a} = -1$; якщо $a = 1$, то $x = 1$.

Відповідь: якщо $a = 0$, то $x = 0$;
якщо $a = -1$, то $x = -1$;
якщо $a = 1$, то $x = 1$.

Приклад 9. Знайти всі значення a, при кожному з яких рівно один корінь рівняння $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ належить інтервалу $(-3; 3)$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо корені заданого рівняння:

$$x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0 \Rightarrow D = 4a^2 - 4(a^2 - 1) = 4 \Rightarrow x_1 = a - 1,\ x_2 = a + 1.$$

Зауважимо, що при будь-якому значенні параметра a корінь $x_1 < x_2$, оскільки $a - 1 < a + 1$.

Тепер знайдемо всі a, при яких перший корінь належить інтервалу $(-3; 3)$. Для цього розв'яжемо нерівність $-3 < a - 1 < 3$, звідки $-2 < a < 4$.

Далі аналогічно визначаємо a, при яких другий корінь належить інтервалу $(-3; 3)$. У цьому разі треба розв'язати нерівність $-3 < a + 1 < 3$, звідки $-4 < a < 2$.

Для того, щоб тільки один корінь заданого рівняння належав заданому інтервалу, знайдені інтервали $-2 < a < 4$ (червоний колір на рис. 2.18) і $-4 < a < 2$ (синій колір на рис. 2.18) не повинні перетинатися. При цьому варто окремо розглянути випадки:

• якщо $a = -2$, то корінь $x_1 = -3$, дійсно не належить інтервалу $(-3; 3)$,

але корінь $x_2 = -1$, при цьому належить вказаному інтервалу;

• якщо $a = 2$, то корінь $x_2 = 3$, дійсно не належить інтервалу $(-3; 3)$, але корінь $x_1 = 1$, при цьому, належить вказаному інтервалу.

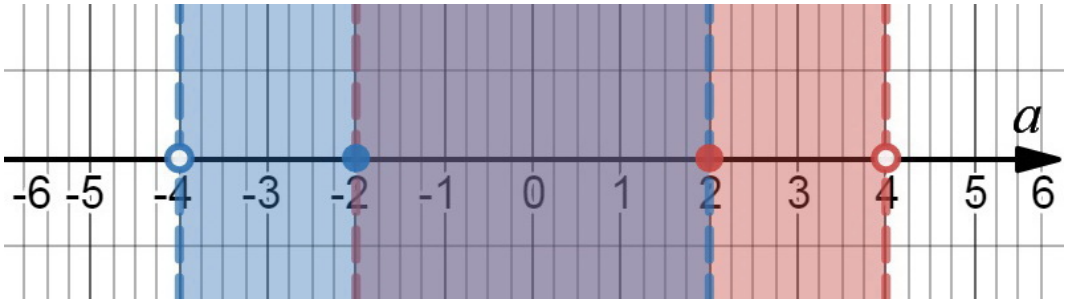


Рис. 2.18

Отже, з рис. 2.18 видно, що при $a \in (-4; -2] \cup [2; 4)$ (на цих інтервалах одна штриховка різного кольору, тобто немає перетину) рівно один корінь рівняння належить інтервалу (-3; 3).

Відповідь: $a \in (-4; -2] \cup [2; 4)$.

Приклад 10. Знайти всі значення a, при кожному з яких нерівність $x^2 - (2a+1)x + a^2 + a - 12 \leq 0$ виконується при будь-якому $x \in (1; 2)$.

Розв'язання. Знайдемо корені квадратичної функції:

$$y = x^2 - (2a+1)x + a^2 + a - 12 \Rightarrow D = 49 \Rightarrow x_1 = a - 3,\ x_2 = a + 4.$$

Зауважимо, що при будь-якому значенні параметра a корінь $x_1 < x_2$, оскільки $a - 3 < a + 4$.

З **теореми 2.1 (про знак квадратичної функції)** випливає, що розв'язком заданої нерівності буде інтервал $x \in [a - 3; a + 4]$. Вимога задачі буде виконана, якщо інтервал $(1; 2)$ цілком міститься у відрізку $[a - 3; a + 4]$.

Це означає, що необхідно розв'язати систему

$$\begin{cases} a - 3 \leq 1, \\ a + 4 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow -2 \leq a \leq 4.$$

Стоп-кадри анімації розв'язання показані на рис. 2.19.

Цю задачу можна ще розв'язати, користуючись теоремою **Т.6** з табл.2.1, але розв'язання при цьому буде трохи складніше.

Відповідь: $a \in [-2;\ 4]$.

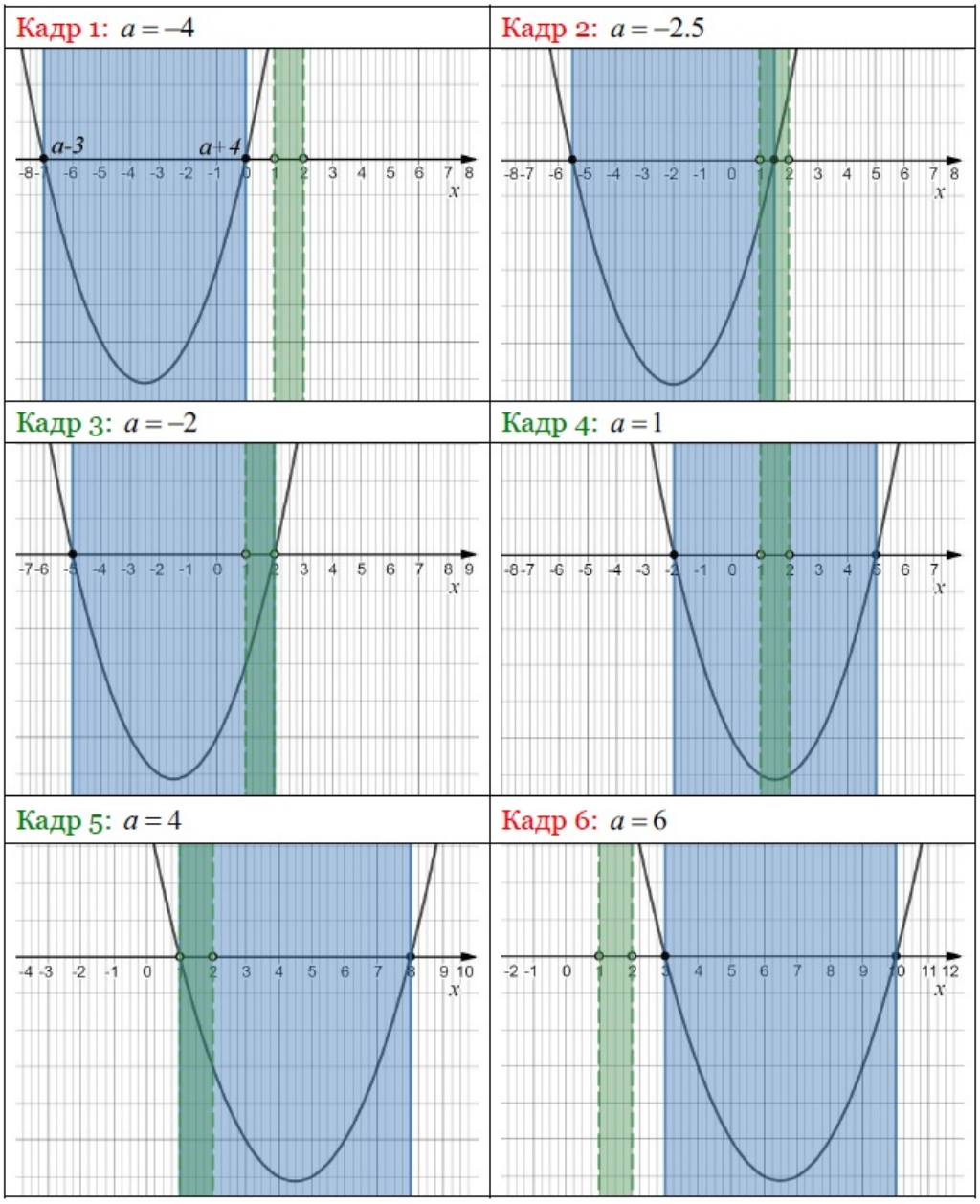


Рис. 2.19

Приклад 11. Для кожного значення параметра a розв'язати нерівність $(x+15)(x-3a)<0$.

Розв'язання. Коренями квадратичної функції $f(x)=(x+15)(x-3a)$ є $x=-15$ і $x=3a$. Оскільки однозначно вказати, яке з цих чисел більше, а яке — менше, ми не можемо, то розглянемо всі можливі випадки:

► якщо $-15<3a$, то $a>-5$ і з **теореми 2.1 (про знак квадратичної функції)** випливає, що $x\in(-15;\ 3a)$;

► якщо $-15 = 3a$, то $a = -5$ і з **теореми 2.1** випливає, що $x \in \varnothing$;

► якщо $-15 > 3a$, то $a < -5$ і з **теореми 2.1** випливає, що $x \in (3a;\ -15)$.

Відповідь: якщо $a > -5$, то $x \in (-15;\ 3a)$;

якщо $a = -5$, то $x \in \varnothing$;

якщо $a < -5$, то $x \in (3a;\ -15)$.

Приклад 12. Для кожного значення параметра a розв'язати нерівність $ax^2 - (2a+1)x + 2 > 0$.

Розв'язання. Передусім зауважимо, що при $a = 0$ нерівність буде лінійною, а при $a \neq 0$ — квадратною. У разі квадратної нерівності важливим є знак числа a, тому що саме він буде визначати, куди спрямовані гілки параболи — графіка квадратичної функції $y = ax^2 - (2a+1)x + 2,\ (a \neq 0)$.

► Якщо $a = 0$, то нерівність набуває вигляду $2 - x > 0$, тобто стає лінійною і її розв'язок $x < 2$.

► Якщо $a \neq 0$, то задана нерівність є квадратною. Коренями квадратичної функції $y = ax^2 - (2a+1)x + 2$ є $x_1 = \dfrac{1}{a}$ і $x_2 = 2$.

• При $a < 0$ гілки параболи спрямовані вниз і $x_1 < x_2$. У цьому випадку, відповідно до **теореми 2.1 (про знак квадратичної функції)**, розв'язком нерівності будуть усі $x \in \left(\dfrac{1}{a};\ 2\right)$.

• При a$>$ 0 гілки параболи спрямовані вверх, проте не можна однозначно вказати, який корінь квадратичної функції більше, а який менше. Необхідно розглянути всі можливі варіанти.

I. Якщо $\dfrac{1}{a} < 2$, то $a > 0{,}5$ і в цьому випадку $x \in \left(-\infty;\ \dfrac{1}{a}\right) \cup (2;\ +\infty)$.

II. Якщо $\dfrac{1}{a} = 2$, то $a = 0{,}5$ і в цьому випадку $x \in (-\infty;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$.

III. Якщо $\dfrac{1}{a} > 2$, то $0 < a < 0{,}5$ і в цьому випадку $x \in (-\infty;\ 2) \cup \left(\dfrac{1}{a};\ +\infty\right)$.

Ефект зміни знака параметра a, а також випадок, коли $a = 0$ краще сприймається, якщо це зобразити графічно у вигляді рухомих графіків (анімації) в околі точки $a = 0$. Стоп-кадри такої анімації представлені на

рис. 2.20 (червоний колір — розв'язок нерівності, зелений — графік заданої квадратичної функції).

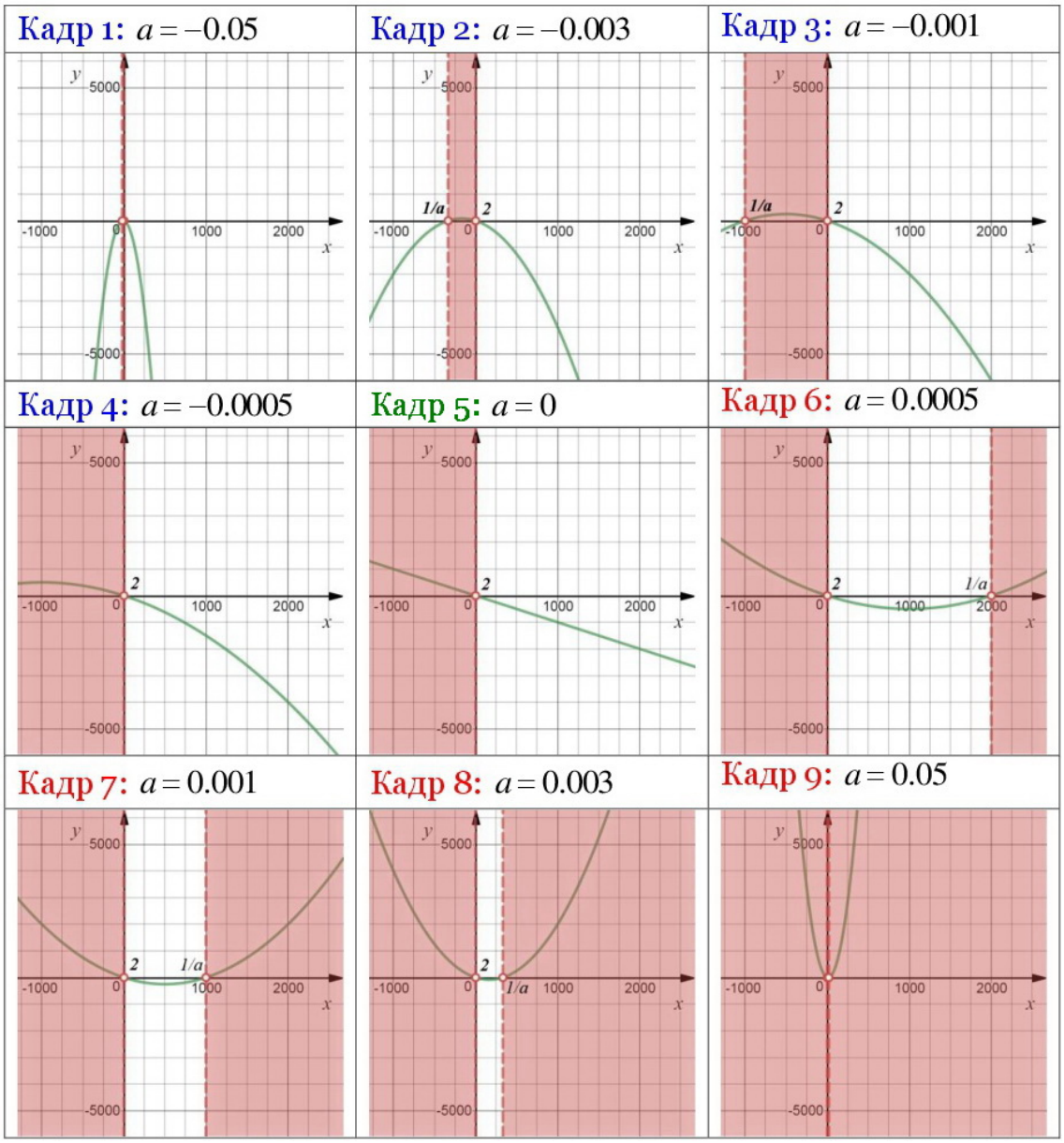


Рис. 2.20

Повне розв'язання цієї задачі представленно у вигляді стоп-кадрів на рис. 2.21.

Відповідь: якщо $a = 0$, то $x \in (-\infty;\ 2)$;

якщо $a < 0$, то $x \in \left(\dfrac{1}{a};\ 2\right)$;

якщо $a > 0{,}5$ то $x \in \left(-\infty;\ \dfrac{1}{a}\right) \cup (2;\ +\infty)$;

якщо $a = 0{,}5$ то $x \in (-\infty;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$;

якщо $0 < a < 0{,}5$ то $x \in (-\infty;\ 2) \cup \left(\dfrac{1}{a};\ +\infty\right)$.

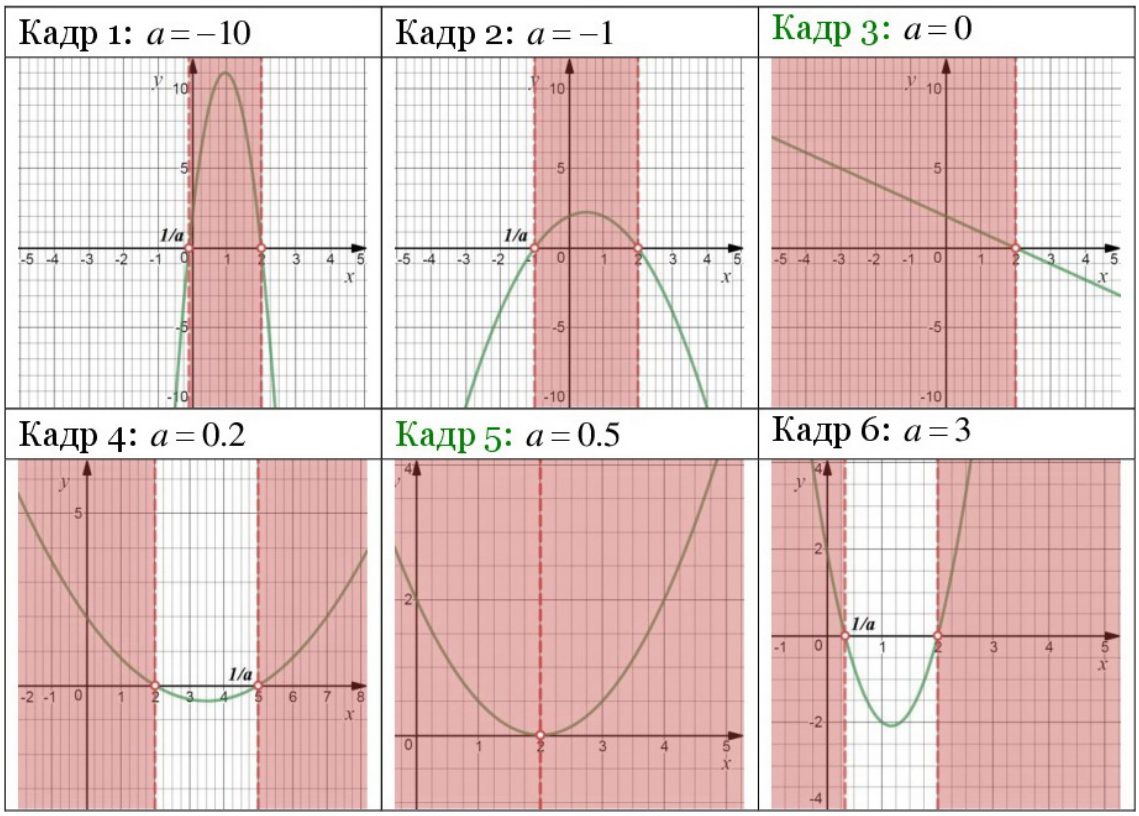


Рис. 2.21

Приклад 13. Знайти всі значення a, при кожному з яких корені рівняння $x^2 - 6ax + 9a^2 - 2a + 2 = 0$ більше числа 3.

Розв'язання. Цю задачу можна розв'язати кількома способами. Ми наведемо два з них. Обидва способи, на наш погляд, рівною мірою мають право на застосування.

Спосіб I. Цей спосіб грунтується на застосуванні необхідних і достатніх умов розташування коренів квадратичної функції. А саме, корені квадратичної функції $f(x) = x^2 - 6ax + 9a^2 - 2a + 2 = 0$ будуть більше 3 при виконанні умов теореми **T.1** з табл. 2.1. Це означає, що необхідно розв'язати

систему нерівностей $\begin{cases} D \geq 0, \\ f(3) > 0, \\ x_{\text{в}} > 3. \end{cases}$

У нашому випадку будемо мати:

$$\begin{cases} 36a^2 - 4(9a^2 - 2a + 2) \geq 0, \\ 9 - 18a + 9a^2 - 2a + 2 > 0, \\ 3a > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 \geq 0, \\ 9a^2 - 20a + 11 > 0, \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 1, \\ a \in (-\infty;\ 1) \cup \left(\dfrac{11}{9};\ +\infty\right), \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow a > \frac{11}{9}.$$

<u>Спосіб II.</u> Знайдемо корені заданої квадратичної функції:

$$D = 8(a-1) \Rightarrow x_{1,2} = 3a \pm \sqrt{2a-2}.$$

Для того, щоб знайдені корені були більше 3 ($3 < x_1 \leq x_2$), достатньо розв'язати нерівність $3a - \sqrt{2a-2} > 3$ або $\sqrt{2a-2} < 3a - 3$. Ця нерівність рівносильна наступній системі (див. розділ ірраціональні нерівності):

$$\begin{cases} 2a - 2 \geq 0, \\ 3a - 3 > 0, \\ 2a - 2 < (3a-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 1, \\ a > 1, \\ 9a^2 - 20a + 11 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > \frac{11}{9}.$$

Відповідь: $a \in \left(\dfrac{11}{9};\ +\infty\right)$.

<u>Приклад 14.</u> Знайти всі значення параметра k, при яких квадратний тричлен $kx^2 + (k+1)x + 2$ має дійсні корені, які належать відрізку $[-1;\ 1]$.

Розв'язання. Застосуємо теорему **T.5** з табл. 2.1. Тоді задача зводиться

до розв'язання системи $\begin{cases} D \geq 0, \\ kf(-1) > 0, \\ kf(1) > 0, \\ -1 < x_{\text{в}} < 1. \end{cases}$ Отже,

$$\begin{cases} (k+1)^2 - 8k \geq 0, \\ k(k+(k+1)+2) > 0, \\ k(k-(k+1)+2) > 0, \\ -1 < -\dfrac{k+1}{2k} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - 6k + 1 \geq 0, \\ k > 0, \\ k(2k+3) > 0, \\ \begin{cases} \dfrac{k+1}{2k} < 1, \\ \dfrac{k+1}{2k} > -1; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \in (-\infty;\ 3-2\sqrt{2}] \cup [3+2\sqrt{2};\ +\infty), \\ k \in (0;\ +\infty) \\ k \in (-\infty;\ -1{,}5) \cup (0;\ +\infty), \\ k \in (1;\ +\infty). \end{cases}$$

Нанесемо одержані множини розв'язків кожної з нерівностей на числову вісь (рис. 2.22). Розв'язком всієї системи буде перетин інтервалів.

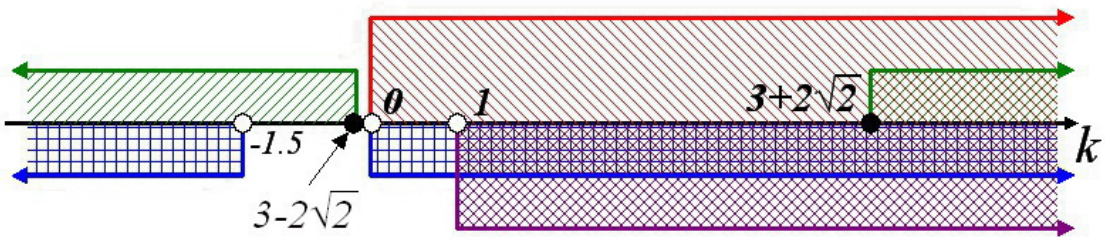


Рис. 2.22

Остаточно отримаємо $k \in [3+2\sqrt{2};\ +\infty)$.

Відповідь: $k \in [3+2\sqrt{2};\ +\infty)$.

Приклад 15. Знайти всі значення a, при кожному з яких рівняння $x^2 + ax + a = 0$ має корені менше числа 1.

Розв'язання. Застосуємо теорему **Т.3** з табл. 2.1. Тоді задача зводиться

до розв'язання системи $\begin{cases} D \geq 0, \\ f(1) > 0, \\ x_{\text{в}} < 1. \end{cases}$ Отже,

$$\begin{cases} a(a-4) \geq 0, \\ 2a+1 > 0, \\ -0{,}5a < 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty;\ 0] \cup [4;\ +\infty), \\ a \in (-0{,}5;\ +\infty) \\ a \in (-2;\ +\infty). \end{cases}$$

Нанесемо одержані множини розв'язків кожної з нерівностей на числову вісь (рис. 2.23). Розв'язком всієї системи буде перетин інтервалів.

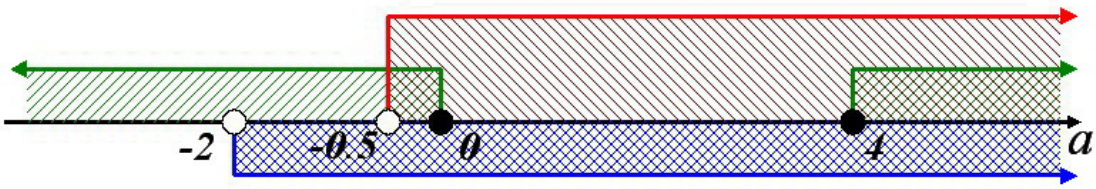


Рис. 2.23

Остаточно отримаємо $a \in (-0{,}5;\ 0] \cup [4;\ +\infty)$.

Відповідь: $a \in (-0{,}5;\ 0] \cup [4;\ +\infty)$.

Приклад 16. Знайти всі значення a, при кожному з яких корені рівняння $x^2 - (2a+1)x + 4 - a = 0$ лежать по різні сторони від числа 3.

Розв'язання. Застосуємо теорему **Т.7** з табл. 2.1. Тоді задача зводиться до розв'язання однієї нерівності $f(3) < 0$. Отже,

$$9 - 3(2a+1) + 4 - a < 0 \Leftrightarrow -7a + 10 < 0 \Leftrightarrow a > \frac{10}{7}.$$

Відповідь: $a \in \left(\frac{10}{7};\ +\infty\right)$.

Приклад 17. При яких значеннях параметра a корені x_1 і x_2 рівняння $(3a+2)x^2 + (a-1)x + 4a + 3 = 0$ задовольняють таким умовам: $x_1 < -1 < x_2 < 1$?

Розв'язання. Задача рівносильна наступній: при яких значеннях параметра a тільки один (більший) корінь заданого квадратного тричлена

$f(x) = (3a+2)x^2 + (a-1)x + 4a + 3$ належить інтервалу $(-1; 1)$, а інший корінь менше -1?

Застосуємо теорему **Т.9** з табл. 2.1. Тоді задача зводиться до розв'язання системи нерівностей

$$\begin{cases} (3a+2)f(-1) < 0, \\ (3a+2)f(1) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3a+2)(6a+6) < 0, \\ (3a+2)(8a+4) > 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \in \left(-1; -\dfrac{2}{3}\right), \\ \\ a \in \left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right) \cup (-0{,}5; +\infty). \end{cases}$$

Нанесемо одержані множини розв'язків кожної з нерівностей на числову вісь (рис. 2.24). Розв'язком всієї системи буде перетин інтервалів.

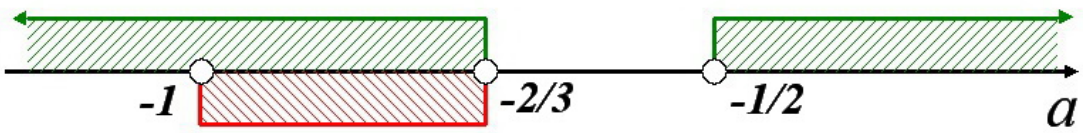


Рис. 2.24

Остаточно отримаємо $a \in \left(-1; -\dfrac{2}{3}\right)$.

Відповідь: $a \in \left(-1; -\dfrac{2}{3}\right)$.

Приклад 18. Розв'язати нерівність $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m - 3 > 0$, де m параметр.

Розв'язання. Необхідно дуже уважно розглянути всі можливі випадки.

1. При $m = 1$ нерівність стає лінійною і приймає вид $-4x - 2 > 0$. Її розв'язком буде $x < -0{,}5$.

2. При $m \neq 1$ маємо квадратне рівняння з дискримінантом $D = 6m - 2$. Перейдемо до дослідження дискримінанту.

2.1. Якщо $D = 0$, то $6m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{3}$. Підставимо це значення до вихідної нерівності:

$$\left(\frac{1}{3}-1\right)x^2-2\left(\frac{1}{3}+1\right)x+\frac{1}{3}-3>0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x^2-\frac{8}{3}x-\frac{8}{3}>0 \Leftrightarrow (x+2)^2<0.$$

Це означає, що в цьому випадку $x \in \varnothing$.

2.2. Якщо $D<0$, то $6m-2<0 \Leftrightarrow m<\frac{1}{3}$. У цьому випадку також $x \in \varnothing$.

2.3. Якщо $D>0$, то $6m-2>0 \Leftrightarrow m>\frac{1}{3}$. Тоді квадратний тричлен має корені $x_{1,2}=\dfrac{m+1\pm\sqrt{6m-2}}{m-1}$.

Звернемо увагу на те, що при переході через значення $m=1$ коефіцієнт при x^2 змінює знак, тобто змінюється напрямок гілок параболи. Тому необхідно розглядати два випадки.

2.3.1. Якщо $m \in \left(\frac{1}{3};1\right)$, то коефіцієнт $m-1<0$ і гілки параболи спрямовані вниз.

Впорядкуємо точки x_1 і x_2. Підставимо будь-яке значення m, з інтервалу $\left(\frac{1}{3};1\right)$ в x_1 і x_2. Наприклад, $m=0{,}5$, тоді: $x_1=-1$, $x_2=-5$. Звідси $x_2<x_1$ і відповідно до **теореми 2.1** матимемо, що

$$x \in \left(\frac{m+1+\sqrt{6m-2}}{m-1};\frac{m+1-\sqrt{6m-2}}{m-1}\right).$$

2.3.2. $m \in (1;+\infty)$, то коефіцієнт $m-1>0$ і гілки параболи спрямовані вверх.

Впорядкуємо точки x_1 і x_2. Підставимо будь-яке значення m, з інтервалу $m \in (1;+\infty)$ в x_1 і x_2. Наприклад, $m=2$, тоді: $x_1=-0{,}1$, $x_2=6{,}1$. Звідси $x_1<x_2$ і відповідно до **теореми 2.1** матимемо, що

$$x \in \left(-\infty;\frac{m+1-\sqrt{6m-2}}{m-1}\right) \cup \left(\frac{m+1+\sqrt{6m-2}}{m-1};+\infty\right).$$

Відповідь: $m \in \left(-\infty;\frac{1}{3}\right]$, то розв'язків немає;

якщо $m=1$, то $x \in (-\infty;-0{,}5)$;

якщо $m \in \left(\frac{1}{3};1\right)$, то $x \in \left(\dfrac{m+1+\sqrt{6m-2}}{m-1};\dfrac{m+1-\sqrt{6m-2}}{m-1}\right)$;

якщо $m \in (1; +\infty)$, то $x \in \left(\dfrac{m+1-\sqrt{6m-2}}{m-1}; \dfrac{m+1+\sqrt{6m-2}}{m-1}\right)$.

Приклад 19. Знайти всі значення параметра a, для яких нерівність $ax^2 + (a-1)x + a - 3 < 0$ виконується при всіх дійсних значеннях x.

Розв'язання. Якщо $a = 0$ то нерівність лінійна $-x - 3 < 0$ і є справедливою при $x > -3$. При $a \neq 0$ вихідна нерівність є квадратичною і, може виконуватися при всіх $x \in \mathbb{R}$ в разі, якщо гілки параболи спрямовані вниз і вона не перетинає вісь абсцис. Отримуємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} a < 0, \\ D < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ (a-1)^2 - 4a(a-3) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ 3a^2 - 10a - 1 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; 0), \\ a \in \left(-\infty; \dfrac{5-2\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{5+2\sqrt{7}}{3}; +\infty\right); \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(-\infty; \dfrac{5-2\sqrt{7}}{3}\right).$$

Відповідь: $a \in \left(-\infty; \dfrac{5-2\sqrt{7}}{3}\right)$.

Насамкінець не зайвим буде ще раз звернути увагу, що перевага використання методу графічної інтерпретації в порівнянні з використанням формул (2.8) полягає в тому, що метод графічної інтерпретації дозволяє звести задачу визначення приналежності коренів заданому інтервалу до розв'язання системи раціональних нерівностей.

Завдання для самостійної перевірки знань

1. Розв'язати рівняння з параметром a:

а) $x^2 = a$; б) $x^2 = a^2 - 3a - 4$;

в) $ax^2 = 4$; г) $(a^2 - 3a - 4)x^2 = 4$.

Відповідь: а) якщо $a < 0$, то розв'язків немає;

якщо $a = 0$, то $x = 0$;

якщо $a > 0$, то $x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$;

б) якщо $a \in (-1; 4)$, то розв'язків немає;

якщо $a = -1$ і $a = 4$, то $x_{1,2} = 0$;

якщо $a \notin (-1; 4)$, то $x_{1,2} = \pm\sqrt{a^2 - 3a - 4}$;

в) якщо $a \leq 0$, то розв'язків немає;

якщо $a > 0$, то $x_{1,2} = \pm\dfrac{2}{\sqrt{a}}$;

г) якщо $a \in [-1; 4]$, то розв'язків немає;

якщо $a \notin [-1; 4]$, то $x_{1,2} = \pm\dfrac{2}{\sqrt{a^2 - 3a - 4}}$.

2. Розв'язати рівняння з параметром a:

а) $(a^2 - 6a + 5)x^2 - (a - 5)x = 0$; б) $x^2 - 2(a - 1)x + 2a + 1 = 0$.

Відповідь: а) якщо $a = 5$, то $x \in \mathbb{R}$;

якщо $a = 1$, то $x = 0$;

якщо $a \in (-\infty; 1) \cup (1; 5) \cup (5; +\infty)$, то $x_1 = 0$ і $x_2 = \dfrac{1}{a - 1}$;

б) якщо $a \in (0; 4)$, то то розв'язків немає;

якщо $a = 0$, то $x_{1,2} = -1$;

якщо $a = 4$, то $x_{1,2} = 3$;

якщо $a \notin (0; 4)$, то $x_{1,2} = a - 1 \pm \sqrt{a^2 - 4a}$.

3. Для кожного значення параметра a розв'язати рівняння:

а) $x^2 - 2ax + 5a - 6 = 0$; б) $ax^2 + 2x + 1 = 0$.

Відповідь: а) якщо $a \in (2; 3)$, то розв'язків немає;

якщо $a = 2$, то $x_{1,2} = 2$;

якщо $a = 3$, то $x_{1,2} = 3$;

якщо $a \notin (2; 3)$, то $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 5a + 6}$;

б) якщо $a > 1$, то то розв'язків немає;

якщо $a = 0$, то $x_{1,2} = -0{,}5$;

якщо $a = 1$, то $x_{1,2} = -1$;

якщо $a < 0$ і $a \in (0; 1)$, то $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - a}}{a}$.

4. Для кожного значення параметра a визначити, скільки різних дійсних коренів має рівняння $(a - 1)x^2 + 2(a + 1)x + a - 2 = 0$.

Відповідь: якщо $a < 0{,}2$, то розв'язків немає;

якщо $a = 1$ і $a = 0,2$, то один корінь;

якщо $a \in (0{,}2; 1) \cup (1; +\infty)$, то два корені.

5. Для кожного значення параметра a розв'язати нерівність:

а) $x - 2x^2 + a - 1 < 0$; б) $x^2 - 4x + 8a - a^2 - 12 > 0$;

в) $\dfrac{x^2}{a} - 2x - \dfrac{x}{a} + a + 1 > 0$; г) $ax^2 + x + 1 < 0$.

Відповідь: а) якщо $a = \dfrac{7}{8}$, то $x \in (-\infty; 0{,}25) \cup (0{,}25; +\infty)$;

якщо $a > \dfrac{7}{8}$, то $x \in \left(-\infty; \dfrac{1 - \sqrt{8a - 7}}{4}\right) \cup \left(\dfrac{1 + \sqrt{8a - 7}}{4}; +\infty\right)$;

якщо $a < \dfrac{7}{8}$, то $x \in \mathbb{R}$;

б) якщо $a < 4$, то $x \in (-\infty; a - 2) \cup (6 - a; +\infty)$;

якщо $a = 4$, то $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$;

якщо $a > 4$, то $x \in (-\infty; 6 - a) \cup (a - 2; +\infty)$;

в) якщо $a = 0$, то розв'язків немає;

якщо $a > 0$, то $x \in (-\infty; a) \cup (a + 1; +\infty)$;

якщо $a < 0$, то $x \in (a; a + 1)$;

г) якщо $a \geq 0{,}25$, то розв'язків немає;

якщо $a = 0$, то $x \in (-\infty; -1)$;

якщо $a \in (0; 0{,}25)$, то $x \in \left(\dfrac{-1 - \sqrt{1 - 4a}}{2a}; \dfrac{-1 + \sqrt{1 - 4a}}{2a}\right)$;

якщо $a < 0$, то $x \in \left(-\infty; \dfrac{-1 + \sqrt{1 - 4a}}{2a}\right) \cup \left(\dfrac{-1 - \sqrt{1 - 4a}}{2a}; +\infty\right)$.

6. Розв'язати нерівність $(3k-1)x^2 - 2(2k-1)x + 2k - 1 > 0$, де k параметр.

Відповідь: $k \in (-\infty; 0]$, то розв'язків немає;

якщо $k = \dfrac{1}{3}$, то $x \in (0{,}5; +\infty)$;

якщо $k \in \left(0; \dfrac{1}{3}\right)$, то $x \in \left(\dfrac{2k - 1 + \sqrt{k - 2k^2}}{3k - 1}; \dfrac{2k - 1 - \sqrt{k - 2k^2}}{3k - 1}\right)$;

якщо $k \in \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{2}\right)$, то $x \in \left(\dfrac{2k - 1 - \sqrt{k - 2k^2}}{3k - 1}; \dfrac{2k - 1 + \sqrt{k - 2k^2}}{3k - 1}\right)$;

якщо $k \in \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$, то $x \in \mathbb{R}$;

якщо $k = \dfrac{1}{2}$, то $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

7. При яких значеннях параметра a рівняння $x^2 - 2(a-1)x + a + 5 = 0$ має тільки додатні корені?

Відповідь: $a \in (4; +\infty)$.

8. Знайти всі дійсні значення параметра a, при яких корені рівняння $x^2 + x + 2a = 0$ дійсні і більше a.

Відповідь: $a \in (-\infty; -3)$.

9. Знайти всі дійсні значення параметра b, при яких корені рівняння $x^2 - 2bx - 1 = 0$ дійсні і не перевищують по модулю 2.

Відповідь: $b \in [-0{,}75; 0{,}75]$.

10. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння $-x^2 + 4x - 3a = 0$ не перевищують 4.

Відповідь: $a \in [0; +\infty)$.

11. Знайти всі значення a, при кожному з яких обидва кореня рівняння $2x^2 - (6-a)x + 3a - a^2 = 0$ належать інтервалу $(0; 2]$.

Відповідь: $a \in [1; 3)$.

12. Знайти всі значення a, при кожному з яких корені рівняння $(a+1)x^2 - 3ax + 4a = 0$ лежать в інтервалі $(2; 5)$.

Відповідь: $a \in \left[-\dfrac{16}{7}; -2\right)$.

13. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких нерівність $x^2 + 6x + a \geq 0$ виконується для будь-якого значення x.

Відповідь: $a \in [9; +\infty)$.

14. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких нерівність $ax^2 + 4x + 3a - 1 > 0$ виконується для будь-якого значення $x > 0$.

Відповідь: $a \in \left[\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$.

15. Знайти всі значення a, при кожному з яких корені тричлена $x^2 + (a - 12)x + 25$ належать інтервалу $(4; 8)$.

Відповідь: $a \in \left(\dfrac{7}{4}; 2\right]$.

16. Знайти всі значення a, при кожному з яких жоден з коренів рівняння

$x^2 - (2a+1)x + a^2 + a - 2 = 0$ не входить в інтервал $(1; 5)$.

Відповідь: $a \in (-\infty; -1] \cup [6; +\infty)$.

17. Знайдіть всі значення параметра a, при кожному з яких нерівність $ax^2 + ax + a + 3 > 0$ не має додатних розв'язків.

Відповідь: $a \in (-\infty; -3]$.

2.2.3. Задачі на застосування теорем Вієта

Багато задач, що пов'язані з квадратним тричленом, і методи їх розв'язування грунтуються на застосуванні прямої й зворотної теорем Вієта.

Теорема 2.2 (**теорема Вієта**). *Сума коренів x_1 і x_2 квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ дорівнює відношенню коефіцієнта при x до коефіцієнта при x^2, взятому з протилежним знаком, а добуток дорівнює відношенню вільного члена до коефіцієнта при x^2 :*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Теорема 2.3 (**зворотна теорема Вієта**). *Якщо існують дійсні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 + x_2 = -p$ і $x_1 \cdot x_2 = q$, то ці числа x_1 і x_2 є коренями квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$.*

До типу задач, які передбачають застосування теорем Вієта, відносяться задачі, в яких необхідно визначити такі значення параметра, при яких сума або добуток коренів квадратного тричлена дорівнює деякому числу; сума квадратів або кубів коренів квадратного тричлена приймає найбільше або найменше значення; є обмеження на розташування коренів квадратного тричлена тощо. Зазвичай застосування теорем Вієта значно спрощує розв'язання.

Зауваження 2.5. *Використовуючи теорему Вієта, не можна забувати про існування дійсних коренів рівняння, тобто про умову $D \geq 0$. Якщо в задачі мова йде про* ***різні корені рівняння****, тоді $D > 0$.*

Приклад 1. При яких значеннях параметра a всі корені рівняння $ax^2 - 2(a+1)x + a - 3 = 0$ від'ємні?

Розв'язання. При $a = 0$ вихідне рівняння набуває вигляду $-2x - 3 = 0$ і має корінь $x = -1{,}5$, який задовольняє умові задачі.

Розглянемо випадок $a \neq 0$. Для того, щоб обидва кореня рівняння були від'ємні, необхідно і достатньо виконання умов теореми **Т.4** з табл. 2.1, а саме

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ x_1 + x_2 < 0, \\ x_1 \cdot x_2 > 0. \end{cases}$$

Застосовуючи **теорему 2.2 (теорему Вієта)**, запишемо ці умови у вигляді

$$\begin{cases} 20a + 4 \geq 0, \\ \dfrac{2(a+1)}{a} < 0, \\ \dfrac{a-3}{a} > 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} a \in [-0{,}2; +\infty), \\ a \in (-1; 0), \\ a \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty); \end{cases} \Leftrightarrow a \in [-0{,}2; 0).$$

Об'єднуючи випадки $a = 0$ і $a \neq 0$, отримаємо $a \in [-0{,}2; 0]$ (рис. 2.25).

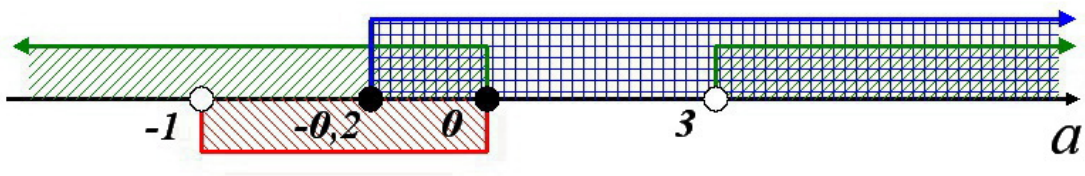


Рис. 2.25

Відповідь: $a \in [-0{,}2; 0]$.

Приклад 2. При яких значеннях параметра p відношення коренів рівняння $2x^2 + (p-10)x + 6 = 0$ дорівнює 12?

Розв'язання. Рівняння має дійсні корені при $D \geq 0$.

Нехай, наприклад, $x_1 = 12x_2$, тоді з урахуванням **теореми 2.2 (теореми**

Вієта) складемо систему $\begin{cases} D = (p-1)^2 - 48 \geq 0, \\ x_1 = 12x_2, \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{p-10}{2}, \\ x_1 \cdot x_2 = 3 \end{cases}$ і розв'яжемо її:

$$\begin{cases} p^2 - 20p + 52 \geq 0, \\ x_1 = 12x_2, \\ 13x_2 = -\dfrac{p-10}{2}, \\ 12x_2^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \in \mathbb{R}, \\ x_1 = \pm 6, \\ \pm 6{,}5 = -\dfrac{p-10}{2}, \\ x_2 = \pm 0{,}5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \in \mathbb{R}, \\ x_1 = \pm 6, \\ p_{1,2} = \{-3; 23\}, \\ x_2 = \pm 0{,}5. \end{cases}$$

Випадок $x_2 = 12x_1$ відрізняється тільки тим, що $x_1 = \pm 0{,}5, \quad x_2 = \pm 6$.

Відповідь: $p_1 = -3, \quad p_2 = 23$.

Приклад 3. Визначити, при яких значеннях параметра a сума коренів квадратного тричлена $x^2 + (2 - a - a^2)x - a^2 = 0$ дорівнює нулю.

Розв'язання. Квадратне рівняння має дійсні корені при $D \geq 0$, тобто при $(2 - a - a^2)^2 + 4a^2 \geq 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R}$. Тоді за **теоремою 2.2 (теоремою Вієта)** $x_1 + x_2 = a^2 + a - 2$.

Сума коренів дорівнює нулю, якщо $a^2 + a - 2 = 0$, тобто при $a = 1$ і $a = -2$.

При цих значеннях a, виходячи з умови задачі, матимемо рівняння: $x^2 - 1 = 0$ і $x^2 - 4 = 0$. Звідси $x_{1,2} = \pm 1$ і $x_{1,2} = \pm 2$, відповідно. Сума $x_1 + x_2 = 0$ в обох випадках.

Відповідь: $a = 1$ і $a = -2$.

Приклад 4. При яких значеннях параметра a добуток коренів квадратного тричлена $x^2 + 2x + (a^2 - 5a + 6) = 0$ дорівнює 2?

Розв'язання. Квадратне рівняння має дійсні корені при $D \geq 0$, тобто при $4 - 4(a^2 - 5a + 6) \geq 0 \Rightarrow a^2 - 5a + 5 \leq 0 \Rightarrow a \in \left[\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right]$. Тоді за **теоремою 2.2 (теоремою Вієта)** $x_1 \cdot x_2 = a^2 - 5a + 6$.

Добуток коренів дорівнює 2, якщо $a^2 - 5a + 6 = 2$ або $a^2 - 5a + 4 = 0$, тобто при $a = 1$ і $a = 4$. Обидва цих значення не входять в інтервал

$\left[\frac{5-\sqrt{5}}{2}; \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right]$. Це означає, що значень параметра a, при яких добуток коренів заданого квадратного тричлена дорівнює 2 не існує, тобто $a \in \varnothing$.

У цьому можна переконатися, якщо у вихідному квадратному тричлені одразу прийняти $a^2 - 5a + 6 = 2$ (відповідно до **теореми 2.2**). Тоді рівняння матиме вигляд $x^2 + 2x + 2 = 0$ і його дискримінант $D < 0$, тобто рівняння не має дійсних коренів.

Відповідь: $a \in \varnothing$.

Приклад 5. Визначити значення параметра a, при яких сума S квадратів коренів рівняння $x^2 + (2-a)x - 3 - a = 0$ є найменшою? Чому дорівнює ця сума?

Розв'язання. Дискримінант рівняння $D = (2-a)^2 + 4(3+a) = a^2 + 16$. Оскільки $D > 0$ при всіх значеннях a, то корені існують.

З **теореми Вієта** випливає, що $x_1 + x_2 = a - 2,\ x_1 \cdot x_2 = -3 - a$. Тоді $S = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (a-2)^2 + 2(3+a) = (a-1)^2 + 9$.

Найменше значення суми квадратів коренів дорівнює 9 і досягається при $a - 1 = 0$, тобто при $a = 1$.

Відповідь: $a = 1, \quad S = 9$.

Приклад 6. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких сума квадратів коренів рівняння $x^2 + ax + 4 = 0$ дорівнює 1.

Розв'язання. Задача зводиться до розв'язання системи $\begin{cases} D \geq 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 1. \end{cases}$

Розв'яжемо цю систему з урахуванням, що $x_1 + x_2 = -a,\ x_1 \cdot x_2 = 4$ (за теоремою Вієта). Отже,

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 16 \geq 0, \\ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-4)(a+4) \geq 0, \\ a^2 - 8 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-4)(a+4) \geq 0, \\ a^2 = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty), \\ a = \pm 3; \end{cases} \Leftrightarrow a \in \varnothing.$$

Відповідь: таких значень параметра a немає.

Приклад 7. Знайти всі значення параметра a, при яких сума кубів різних дійсних коренів рівняння $x^2 - 3x + 4a = 0$ менше 18.

Розв'язання. Якщо задане квадратне рівняння має дійсні корені x_1 і x_2, то за теоремою Вієта $x_1 + x_2 = 3,\ x_1 \cdot x_2 = 4a$. В свою чергу, $D = 9 - 16a$, а $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) = 3(9 - 12a) = 27 - 36a$. Беручи до уваги **зауваження 2.5**, шукані значення параметра знаходимо з системи $\begin{cases} 9 - 16a > 0, \\ 27 - 36a < 18. \end{cases}$ Звідси $\begin{cases} a < \dfrac{9}{16}, \\ a > 0{,}25; \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(0{,}25; \dfrac{9}{16}\right)$.

Відповідь: $a \in \left(0{,}25;\ \dfrac{9}{16}\right)$.

Приклад 8. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких рівняння $3x^2 - 2(a+3)x - a^2 - 2a = 0$ має корені різних знаків.

Розв'язання. Необхідною і достатньою умовою того, що квадратне рівняння має корені різних знаків x_1 і x_2, є нерівність $x_1 \cdot x_2 < 0$. За **теоремою Вієта** маємо: $\dfrac{-a^2 - 2a}{3} < 0$. До цієї нерівності слід додати умову існування двох дійсних різних коренів, а саме $D = 4(a+3)^2 + 12(a^2 + 2a) > 0$. Отже, розв'язуємо систему

$$\begin{cases} \dfrac{-a^2 - 2a}{3} < 0, \\ 4(a+3)^2 + 12(a^2 + 2a) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a+2) > 0, \\ a \in \mathbb{R}; \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-\infty;\ -2) \cup (0;\ +\infty).$$

Відповідь: $a \in (-\infty;\ -2) \cup (0;\ +\infty)$.

Приклад 9. Якими мають бути p і q, щоб рівняння $x^2 + px + q = 0$ мало коренями p і q?

Розв'язання. За умовою задачі

$$x_1 = p,\ x_2 = q. \tag{2.11}$$

З іншого боку, за теоремою Вієта

$$x_1 + x_2 = -p,\ x_1 \cdot x_2 = q. \tag{2.12}$$

Підставляючи (2.11) до (2.12), отримаємо

$$\begin{cases} p+q=-p, \\ p\cdot q=q; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=-2p, \\ -2p^2=-2p; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=-2p, \\ p(p-1)=0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q=-2p, \\ \left[\begin{array}{l} p_1=0, \\ p_2=1; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} p_1=0, \\ q_1=0; \end{cases} \\ \begin{cases} p_2=1, \\ q_2=-2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Проте отриманий результат не можна вважати остаточною відповіддю. Необхідно, щоб обов'язково виконувалася умова $D \geq 0$. Перевіримо це:

$$D=p^2-4q \geq 0 \Leftrightarrow p^2 \geq 4q.$$

Обидві пари значень p і q задовольняють останньої нерівності.

Відповідь: $p_1=0,\ q_1=0;\quad p_2=1,\ q_2=-2.$

Приклад 10. Визначити число a так, щоб один з коренів рівняння $4x^2-15x+4a^3=0$ був квадратом іншого.

Розв'язання. Спочатку визначимо значення a, при яких виконується умова $D \geq 0$ існування коренів квадратного рівняння:

$$D=225-64a^3 \geq 0 \Leftrightarrow 64a^3 \leq 225 \Leftrightarrow a \leq \frac{\sqrt[3]{225}}{4}.$$

За умовою задачі $x_2=x_1^2$ або $x_1=x_2^2$, що те ж саме. За теоремою Вієта $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{15}{4}, \\ x_1\cdot x_2=a^3. \end{cases}$ Підставимо до останньої системи x_1^2 замість x_2:

$$\begin{cases} x_1+x_1^2=\dfrac{15}{4}, \\ x_1\cdot x_1^2=a^3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2+x_1-\dfrac{15}{4}=0, \\ x_1^3=a^3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+a-\dfrac{15}{4}=0, \\ x_1=a. \end{cases}$$

Розв'яжемо рівняння $a^2+a-\dfrac{15}{4}=0$:

$$a^2+a-\frac{15}{4}=0 \Leftrightarrow 4a^2+4a-15=0 \Rightarrow D=16^2 \Rightarrow a_1=-2{,}5,\ a_2=1{,}5.$$

Обидва значення параметра задовольнять умові $a \leq \dfrac{\sqrt[3]{225}}{4}$.

Відповідь: $a_1 = -2{,}5,\ a_2 = 1{,}5$.

Приклад 11. Знайти всі значення a, при яких сума коренів рівняння $x^2 - 2a(x-1) - 1 = 0$ дорівнює сумі квадратів коренів?

Розв'язання. Перетворимо ліву частину заданого рівняння до стандартного вигляду квадратного тричлена, розкриваючи дужки і приводячи подібні: $x^2 - 2a(x-1) - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$. Дискримінант цього рівняння $D = 4a^2 - 4(2a-1) = 4(a-1)^2$ завжди невід'ємний, тобто умова існування дійсних коренів виконується при будь-якому $a \in \mathbb{R}$.

За умовою задачі $x_1^2 + x_2^2 = x_1 + x_2$ або $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = x_1 + x_2$. Підставимо до останнього рівняння $x_1 + x_2 = 2a,\ x_1 \cdot x_2 = 2a - 1$ (**з теореми Вієта**) і розв'яжемо його:

$$(2a)^2 - 2(2a-1) = 2a \Leftrightarrow 4a^2 - 4a + 2 = 2a \Leftrightarrow 2a^2 - 3a + 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D = 1 \Rightarrow a_1 = 0{,}5,\ a_2 = 1.$$

Це і є шукані значення параметра.

Відповідь: $a = 0{,}5,\ a = 1$.

Приклад 12. При якому значенні параметра p корені рівняння $5x^2 - 4(p+3)x + 4 = p^2$ протилежні за знаком? Знайти ці корені.

Розв'язання. Перепишемо вихідне рівняння у вигляді

$$5x^2 - 4(p+3)x + 4 - p^2 = 0.$$

Його дискримінант $D = 16(p+3)^2 - 20(4 - p^2)$ завжди невід'ємний (перевірити це самостійно), тобто умова існування дійсних коренів виконується при будь-якому $a \in \mathbb{R}$.

За **теоремою Вієта**: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{4}{5}(p+3), \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{4 - p^2}{5}. \end{cases}$ Підставимо до останньої системи $x_2 = -x_1$ (за умовою задачі):

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{4}{5}(p+3), \\ -x_1^2 = \dfrac{4 - p^2}{5}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -3, \\ x_1^2 = \dfrac{p^2 - 4}{5}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -3, \\ x_1^2 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -3, \\ x_1 = \pm 1. \end{cases}$$

Відповідь: при $p = -3, \quad x_1 = -1,\ x_2 = 1.$

Приклад 13. Не обчислюючи коренів рівняння $2x^2 + bx + a^2 = 0$, знайти значення виразу $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$.

Розв'язання. Перетворимо суму $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$ дробів, приводячи їх до спільного знаменника:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}. \tag{2.13}$$

З **теореми Вієта** випливає, що $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{2},\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{a^2}{2}$. Підставимо цей результат до правої частини (2.13):

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = -\frac{b}{2} \cdot \frac{2}{a^2} = -\frac{b}{a^2}.$$

Відповідь: $-\dfrac{b}{a^2}$.

Приклад 14. Відомо, що квадратне рівняння $bx^2 + 2(b+1)x + 2b = 0$ має корені. Не розв'язуючи рівняння, визначити знаки коренів.

Розв'язання. Одразу слід зауважити, що при $b = 0$ вихідне рівняння не є квадратним.

Для $b \neq 0$, в першу чергу визначимо ті значення, при яких існують дійсні корені рівняння, тобто коли дискримінант $D \geq 0$:

$$D = 4(b+1)^2 - 8b^2 = -4(b^2 - 2b - 1) \Rightarrow b^2 - 2b - 1 \leq 0 \Rightarrow b \in [1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}].$$

Далі, з **теореми Вієта** випливає:

1) $x_1 \cdot x_2 = 2 > 0$ — це означає, що обидва кореня рівняння одного знака;

2) $x_1 + x_2 = -\dfrac{2(b+1)}{b}$ — означає, що обидва кореня будуть додатні, якщо $-\dfrac{2(b+1)}{b} > 0$, тобто при $b \in (-1; 0)$, а обидва кореня будуть від'ємні, якщо $-\dfrac{2(b+1)}{b} < 0$, тобто при $b \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

Залишається знайти перетин інтервалів $[1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}]$ і $b \in (-1; 0)$ та $[1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}]$ і $b \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$ (рис. 2.26 і рис. 2.27, відповідно).

Відповідь: якщо $b = 0$, то рівняння не є квадратним;

якщо $b \in [1 - \sqrt{2}; 0)$, то обидва кореня будуть додатні;

якщо $b \in (0; 1+\sqrt{2}]$, то обидва кореня будуть від'ємні.

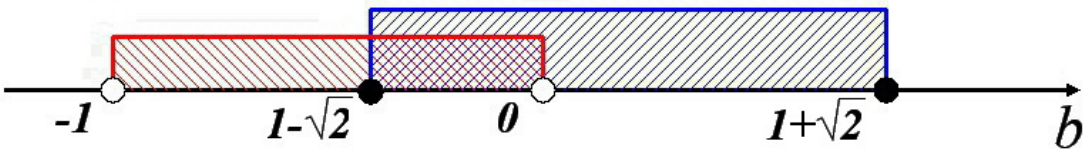


Рис. 2.26

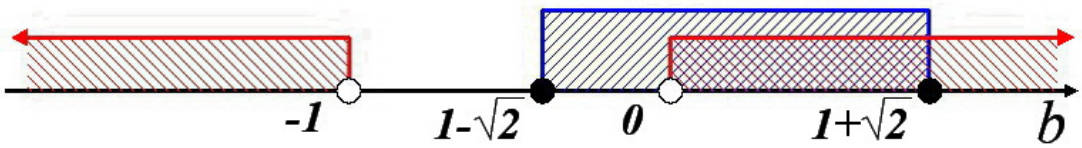


Рис. 2.27

Приклад 15. Визначити всі значення параметра a при яких квадратне рівняння $3ax^2+(4-6a)x+3(a-1)=0$ має корені, і визначити знаки коренів.

Розв'язання. При $a=0$ вихідне рівняння не є квадратним.

При $a \neq 0$ дискримінант $D=(4-6a)^2-36a(a-1)=16-12a$.

Розглянемо уважно всі можливі варіанти.

1. Якщо $D<0$, тобто $16-12a<0 \Leftrightarrow a>\dfrac{4}{3}$, то розв'язків немає.

2. Якщо $D \geq 0$, тобто $a \leq \dfrac{4}{3}$, то рівняння має дійсні корені.

Перейдемо до дослідження знаків коренів заданого рівняння. Це зручніше робити, використовуючи **теорему Вієта**.

2.1. Корені квадратного рівняння будуть різних знаків, якщо $x_1 \cdot x_2 < 0$. За **теоремою Вієта** $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{a-1}{a}$. Тоді маємо нерівність $\dfrac{a-1}{a} < 0$, звідки $a \in (0;1)$.

Щоб зробити остаточний висновок про значення параметра, при яких корені рівняння будуть різних знаків, слід знайти перетин інтервалів $a \leq \dfrac{4}{3}$ і $a \in (0;1)$. Таким перетином буде інтервал $a \in (0;1)$ (рис. 2.28).

2.2. Якщо $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{a-1}{a} > 0$, тобто $a \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$, то корені квадратного рівняння будуть одного знака. Обидва корені додатні, якщо $x_1+x_2>0$. За **теоремою Вієта** $x_1+x_2=-\dfrac{4-6a}{3a}$, тобто маємо нерівність

$-\dfrac{4-6a}{3a} > 0$. Звідси $a \in \mathbb{R}$. Це, в свою чергу, одразу означає, що рівняння не буде мати двох від'ємних коренів.

Для остаточної відповіді за цим пунктом необхідно знайти перетин інтервалів $a \leq \dfrac{4}{3}$ і $a \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$ (рис. 2.29).

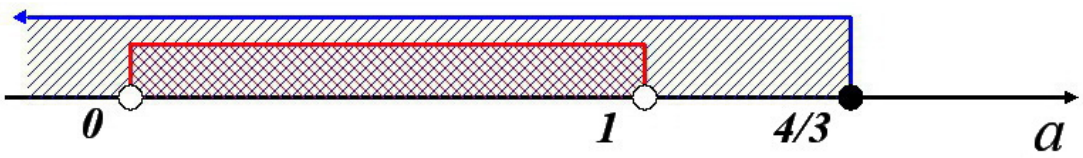


Рис. 2.28

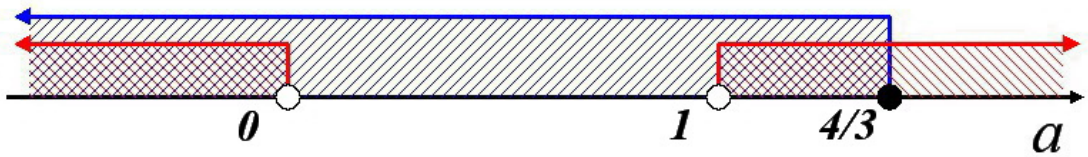


Рис. 2.29

Таким чином, при $a \in (-\infty; 0) \cup \left(1; \dfrac{4}{3}\right]$ рівняння матиме два додатних кореня.

2.3. Залишилося розглянути значення $a = 1$, при якому $x_1 \cdot x_2 = 0$, тобто один з коренів дорівнює нулю.

Оскільки в пункті **2.2.** було доведено, що $x_1 + x_2 > 0$ при будь-якому $a \in \mathbb{R}$, робимо висновок, що інший корінь рівняння буде додатний.

Відповідь: якщо $a = 0$, то рівняння не є квадратним;

якщо $a \in \left(\dfrac{4}{3}; +\infty\right)$, то коренів немає;

якщо $a \in (0; 1)$, то корені різних знаків;

якщо $a \in (-\infty; 0) \cup \left(1; \dfrac{4}{3}\right]$, то обидва кореня додатні;

якщо $a = 1$, то один корінь дорівнює нулю, а інший додатний.

Приклад 16. Скласти квадратне рівняння з коренями $\dfrac{1}{x_1}$ і $\dfrac{1}{x_2}$, де числа x_1, x_2 — корені рівняння $2x^2 - 7x + 4 = 0$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо числа x_1, x_2 — корені заданого рівняння: $2x^2 - 7x + 4 = 0 \Rightarrow D = 17 \Rightarrow x_1 = \dfrac{7-\sqrt{17}}{4}$, $x_2 = \dfrac{7+\sqrt{17}}{4}$.

Тепер рівняння, яке необхідно скласти, будемо шукати, наприклад, у вигляді

$$z^2 + pz + q = 0, \tag{2.14}$$

де p і q — коефіцієнти, що підлягають визначенню, а $z_1 = \dfrac{4}{7-\sqrt{17}}$, $z_2 = \dfrac{4}{7+\sqrt{17}}$ — його корені за умовою задачі. Для визначення p і q скористаємося **теоремою 2.3 (зворотною теоремою Вієта)**:

$$\begin{cases} z_1 \cdot z_2 = q, \\ z_1 + z_2 = -p; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{7-\sqrt{17}} \cdot \dfrac{4}{7+\sqrt{17}} = q, \\ \dfrac{4}{7-\sqrt{17}} + \dfrac{4}{7+\sqrt{17}} = -p; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 0{,}5, \\ p = -\dfrac{7}{4}. \end{cases}$$

Підставимо знайдені p і q до (2.14), отримаємо $z^2 - \dfrac{7}{4}z + \dfrac{1}{2} = 0$ або остаточно $4z^2 - 7z + 2 = 0$.

Відповідь: $4z^2 - 7z + 2 = 0$.

Завдання для самостійної перевірки знань

1. Визначити, при яких значеннях параметра a сума коренів квадратного рівняння $x^2 - (a^2 - 5a + 6)x - a^2 + 5 = 0$ дорівнює нулю.

Відповідь: $a = 3$.

2. Визначити, при яких значеннях параметра a добуток коренів квадратного рівняння $x^2 - 2x + (a^2 - 5a + 6) = 0$ дорівнює нулю.

Відповідь: $a = 2$, $a = 3$.

3. Числа x_1 і x_2 є коренями рівняння $3x^2 - ax - b = 0$. Знайти значення виразів: а) $x_1^2 + x_2^2$; б) $x_1^3 + x_2^3$; в) $x_1^4 + x_2^4$.

Відповідь: а) $\dfrac{a^2 + 6b}{9}$; **б)** $\dfrac{a^3 + 9ab}{27}$; **в)** $\dfrac{a^4 + 12a^2b + 18b^2}{81}$.

4. Не обчислюючи коренів рівняння $2x^2 + bx + a^2 = 0$, знайти значення

виразів: а) $x_2x_1^3 + x_1x_2^3$; б) $\dfrac{x_1}{x_2^2} + \dfrac{x_2}{x_1^2}$.

Відповідь: а) $\dfrac{a^2(b^2-4a^2)}{8}$; **б)** $\dfrac{6a^2b-b^3}{2a^4}$.

5. Відомо, що квадратне рівняння $16x^2 + 16ax + 3a^2 = 0$ має корені. Не розв'язуючи рівняння, визначити знаки коренів.

Відповідь: якщо $a = 0$, то $x_1 = x_2 = 0$;

якщо $a \in (-\infty; 0)$, то обидва кореня будуть додатні;

якщо $a \in (0; +\infty)$, то обидва кореня будуть від'ємні.

6. Визначити всі значення параметра a при яких квадратне рівняння $(a-3)x^2 - 2(3a-4)x + 7a - 6 = 0$ має корені, і визначити знаки коренів.

Відповідь: якщо $a = 3$, то рівняння не є квадратним;

якщо $a \in (-2; 0{,}5)$, то коренів немає;

якщо $a \in \left(\dfrac{6}{7}; 3\right)$, то корені різних знаків;

якщо $a \in (-\infty; -2] \cup \left[0{,}5; \dfrac{6}{7}\right) \cup (3; +\infty)$, то обидва кореня додатні;

якщо $a = \dfrac{6}{7}$, то один корінь дорівнює нулю, а інший додатний.

7. Складіть квадратне рівняння, корені якого були б на одиницю більше коренів квадратного рівняння $3x^2 + 6x - 10 = 0$.

Відповідь: $3x^2 - 13 = 0$.

8. Визначити всі значення параметра a, при яких квадратне рівняння має два дійсних кореня x_1 і x_2, що задовольняють заданій умові, якщо:

$$\text{а) } x^2 + 3ax + a^2 = 0 \quad \text{і} \quad x_1^2 + x_2^2 = 1{,}75;$$

$$\text{б) } x^2 - 2a(x-1) - 1 = 0 \quad \text{і} \quad x_1 + x_2 = x_1^2 + x_2^2.$$

Відповідь: а) $a = \pm 0{,}5$; **б)** $a = 0{,}5$, $a = 1$.

9. При якому значенні параметра m сума квадратів коренів рівняння $x^2 + (2-m)x - m - 3 = 0$ найменша?

Відповідь: $m = 1$.

10. Визначити значення параметра a, при яких сума S квадратів коренів рівняння $x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$ є найбільшою? Чому дорівнює ця сума?

Відповідь: $a = -3, \quad S = 18$.

11. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких рівняння $x^2 - ax + a - 3 = 0$ має корені різних знаків, причому додатний корінь за модулем більше.

Відповідь: $a \in (0; 3)$.

12. Знайти всі значення a, при кожному з яких квадрат різниці різних дійсних коренів тричлена $ax^2 - 4x + 3a + 1$ менше 8.

Відповідь: $a \in \left(-\frac{4}{3}; -1\right] \cup \left(\frac{4}{5}; 1\right)$.

13. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких рівняння $x^2 - (9 + a)x + 9 = 0$ має два різні дійсні корені x_1 і x_2, що задовольняють нерівності $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 2$.

Відповідь: $a \in (-\infty; -15) \cup (-3; 9)$.

14. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких рівняння $x^2 + (3 + a)x + a - 5 = 0$ має корені різних знаків, причому додатний корінь за модулем менше від'ємного.

Відповідь: $a \in (-3; 5)$.

15. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких квадратне рівняння $ax^2 + 2ax + 9 = 0$ має корені одного знака.

Відповідь: $a \in [9; +\infty)$.

16. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких рівняння $x^2 - 2(a + 1)x + a^2 - 9 = 0$ має тільки додатні корені.

Відповідь: $a \in (3; +\infty)$.

17. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких сума квадратів різних дійсних коренів квадратного тричлена $x^2 - (a + 2)x + 4$ не перевищує 17.

Відповідь: $a \in [-7; -6) \cup (2; 3]$.

18. При якому дійсному значенні a сума квадратів коренів рівняння $x^2 + ax + a - 2 = 0$ буде найменшою?

Відповідь: $a = 1$.

19. При яких значеннях параметра a корені квадратного рівняння $(a-1)x^2 + ax + 1 = 0$ від'ємні?

Відповідь: $a \in (1; +\infty)$.

20. У рівнянні $x^2 - 4x + p = 0$ знайти значення параметра p, якщо відомо, що сума квадратів його коренів дорівнює 14.

Відповідь: $p = 1$.

21. При яких значеннях параметра p один з коренів рівняння $4x^2 - (3+2p)x + 2 = 0$ в 8 разів більше іншого?

Відповідь: $p = -6, \quad p = 3$.

2.2.4. Задачі, які зводяться до дослідження квадратного тричлена

Приклад 1. Знайти всі можливі значення параметра a, при яких функція $y = \sqrt{x^2 - 2ax + a + 2}$ визначена для будь-якого дійсного значення x.

Розв'язання. Ця функція визначена для будь-якого x, якщо виконується нерівність $x^2 - 2ax + a + 2 \geq 0$. Останнє можливо тоді й тільки тоді, коли графік квадратичної функції $f(x) = x^2 - 2ax + a + 2$ розташований вище осі абсцис або дотикається її. Тобто рівняння $x^2 - 2ax + a + 2 = 0$ не має коренів або має один корінь (дискримінант $D \leq 0$). Отже, $D = 4a^2 - 4(a+2) \Rightarrow a^2 - a - 2 \leq 0$, звідки випливає, що $a \in [-1; 2]$.

Відповідь: $a \in [-1; 2]$.

Приклад 2. Знайти всі значення a, при яких рівняння $x^2 + ax + 1 = 0$ і $x^2 + x + a = 0$ мають хоча б один спільний корінь.

Розв'язання. Нехай спільним коренем даних рівнянь є $x = k$. Тоді для визначення значень параметра a матимемо систему рівнянь (якщо підставити $x = k$ в умову задачі) $\begin{cases} k^2 + ak + 1 = 0, \\ k^2 + k + a = 0. \end{cases}$ Звідси, після віднімання другого рівняння з першого, отримуємо: $ak - k + 1 - a = 0 \Rightarrow k = \dfrac{a-1}{a-1} \Rightarrow k = 1$ при $a \neq 1$. Тобто система має розв'язки при $a \neq 1$. Підставимо в будь-яке з

рівнянь вихідної системи $k = 1$, матимемо $a = -2$.

Відповідь: $a = -2$.

Приклад 3. Знайти всі значення параметра a, при яких обидва рівняння $x^2 + \frac{8}{a}x - 2a = 0$ і $x^2 + \frac{6}{a}x - a = 0$ мають по два різних дійсних кореня і між коренями одного рівняння знаходиться рівно один корінь іншого рівняння (тобто корені ***перемежаються***).

Розв'язання. Розглянемо спочатку дискримінанти заданих рівнянь. Вони мають бути обидва додатні, щоб рівняння мали два дійсних різних кореня, тобто необхідно розв'язати систему $\begin{cases} D_1 > 0, \\ D_2 > 0. \end{cases}$ Отже,

$$\begin{cases} \frac{64}{a^2} + 8a > 0, \\ \frac{36}{a^2} + 4a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8 + a^3}{a^2} > 0, \\ \frac{9 + a^3}{a^2} > 0, \\ a \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -2, \\ a > -\sqrt[3]{9}, \\ a \neq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > -2, \\ a \neq 0. \end{cases}$$

Нехай тепер x_1 і x_2 — корені першого рівняння, а x_3 і x_4 — корені другого.

I. Розглянемо випадок розташування коренів, як на рис. 2.30.

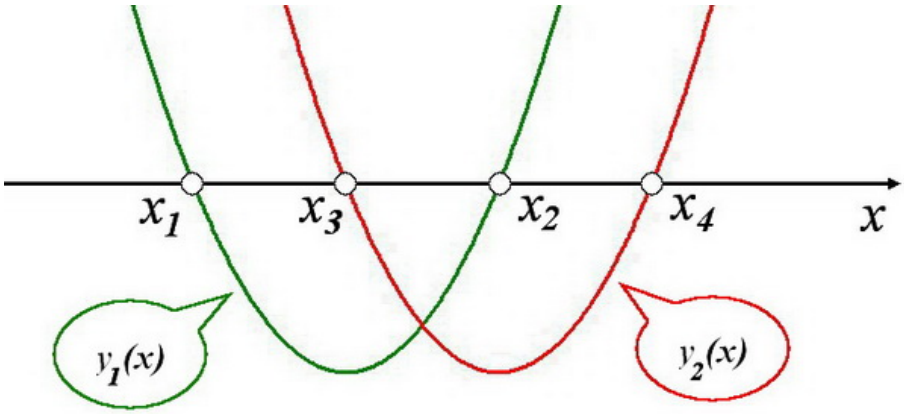


Рис. 2.30

Це означає, що коли, наприклад, в $y_1(x) = x^2 + \frac{8}{a}x - 2a$ підставити корені x_3 і x_4, то мають виконуватися нерівності

$$x_3^2 + \frac{8}{a}x_3 - 2a < 0 \quad \text{і} \quad x_4^2 + \frac{8}{a}x_4 - 2a > 0.$$

Звідси випливає, що

$$\left(x_3^2+\frac{8}{a}x_3-2a\right)\left(x_4^2+\frac{8}{a}x_4-2a\right)<0$$

або після розкриття дужок

$$x_3^2x_4^2+\frac{8}{a}x_3x_4(x_3+x_4)+\frac{64}{a^2}x_3x_4-2a(x_3^2+x_4^2)-16(x_3+x_4)+4a^2<0. \quad (2.15)$$

У вихідному рівнянні за теоремою Вієта $x_3+x_4=-\dfrac{6}{a},\ x_3x_4=-a$. Тоді

$$x_3^2+x_4^2=(x_3+x_4)^2-2x_3x_4=\frac{36}{a^2}+2a$$

і нерівність (2.15) запишеться у вигляді

$$a^2+\frac{8}{a}(-a)\left(-\frac{6}{a}\right)+\frac{64}{a^2}(-a)-2a\left(\frac{36}{a^2}+2a\right)-16\left(-\frac{6}{a}\right)+4a^2<0$$

або

$$a^2+\frac{8}{a}<0\Rightarrow\frac{a^3+8}{a}<0.$$

З останньої нерівності з урахуванням обмежень на дискримінанти, для випадку **I.** остаточно отримаємо $a\in(-2;0)$.

II. Для випадку розташування коренів на числовій осі в порядку $x_3,\ x_1,\ x_4,\ x_2$, будемо мати такий самий результат (перевірити самостійно).

Відповідь: $a\in(-2;0)$.

Приклад 4. Знайти множину значень функції $y=\dfrac{x^2-10x+7}{2x^2-1}$.

Розв'язання. Якщо рівняння

$$\frac{x^2-10x+7}{2x^2-1}=a \quad (2.16)$$

має розв'язок, то число a входить в множину значень функції y. З'ясуємо при яких значеннях a рівняння (2.16) має розв'язок.

У рівнянні (2.16) перенесемо все в ліву частину і приведемо до спільного знаменника, одержимо

$$\frac{x^2-10x+7-a(2x^2-1)}{2x^2-1}=0 \Leftrightarrow \frac{(2a-1)x^2+10x-a-7}{2x^2-1}=0$$

або

$$\begin{cases} (2a-1)x^2+10x-a-7=0, \\ 2x^2-1\neq 0. \end{cases}$$

Рівняння

$$(2a-1)x^2+10x-a-7=0 \tag{2.17}$$

при $a=0{,}5$ є лінійним і $x=0{,}75$ — його корінь. При $a\neq 0{,}5$ рівняння (2.17) є квадратним і має розв'язок, коли його дискримінант $D=4(2a^2+13a+18)$ невід'ємний. Нерівність $2a^2+13a+18\geq 0$ має розв'язок при $a\in(-\infty;-4{,}5)\cup(-2;+\infty)$.

Зауважимо, що знаменник $2x^2-1$ обертається в нуль при $x_{1,2}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Ці числа не є коренями рівняння (2.17) ні при якому значенні параметра a.

Відповідь: $E_y=(-\infty;-4{,}5)\cup(-2;+\infty)$.

Приклад 5. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівнянь $x^2+4x+4a=0$ і $x^2+3x+6a=0$ не перемежаються, тобто обидва рівняння мають по два дійсних різних кореня і між коренями одного рівняння немає жодного кореня іншого рівняння.

Розв'язання. Щоб задані рівняння мали два дійсних різних кореня, їх дискримінанти мають бути додатними, тобто необхідно розв'язати систему

$$\begin{cases} D_1>0, \\ D_2>0. \end{cases} \text{ Отже, } \begin{cases} 16(1-a)>0, \\ 9-24a>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<1, \\ a<\dfrac{3}{8}; \end{cases} \Rightarrow a\in\left(-\infty;\dfrac{3}{8}\right).$$

Абсциса вершини першої параболи $x_{\text{в}_1}=-2$, а другої — $x_{\text{в}_2}=-1{,}5$.

Знайдемо абсциссу точки перетину парабол, для цього розв'яжемо рівняння $x^2+4x+4a=x^2+3x+6a$. Отримаємо $x_0=2a$ (рис. 2.31).

З рис. 2.31 випливає, що задані рівняння мають по два різних дійсних

корені і ці корені задовольняють вимогам задачі, якщо:

$$\begin{cases} \begin{cases} D_1 > 0, \\ D_2 > 0, \end{cases} \\ -2 < x_0 < -1{,}5, \\ f_1(2a) > 0, \\ f_2(2a) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le 0{,}375, \\ -1 < a < -0{,}75, \\ 4a^2 + 12a > 0, \\ 4a^2 + 12a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; 0{,}375), \\ a \in (-1; -0{,}75), \\ a \in (-\infty; -3) \cup (0; +\infty). \end{cases}$$

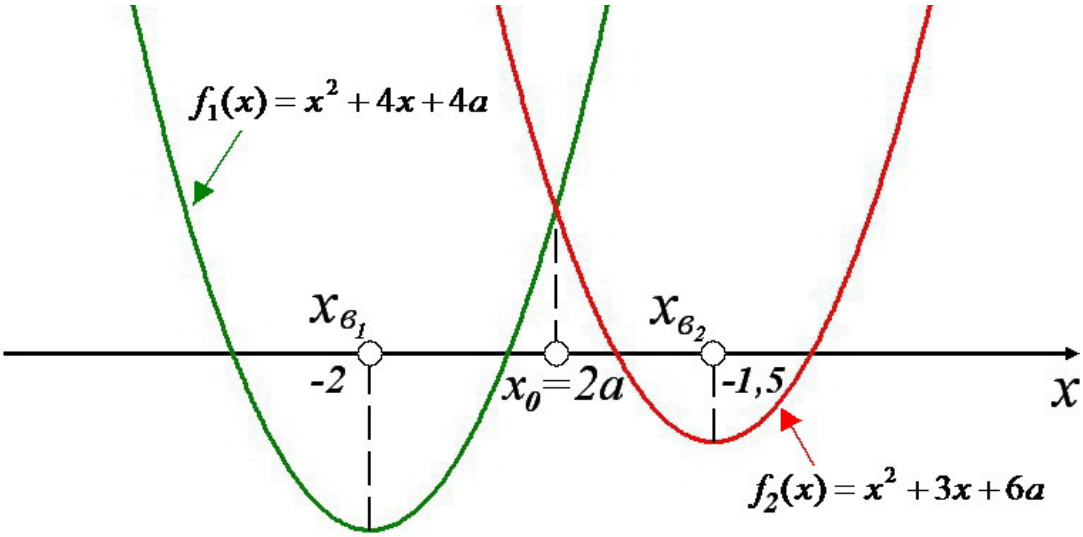


Рис. 2.31

Нанесемо одержані множини розв'язків кожної з нерівностей на числову вісь (рис. 2.32). Розв'язком всієї системи буде перетин інтервалів.

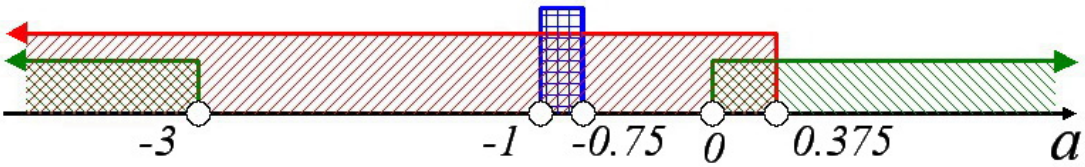


Рис. 2.32

Остаточно отримаємо $a \in \varnothing$, тобто система не має розв'язків і таких a не існує.

Розв'язання цієї задачі можна представити також у вигляді стоп-кадрів на рис. 2.33.

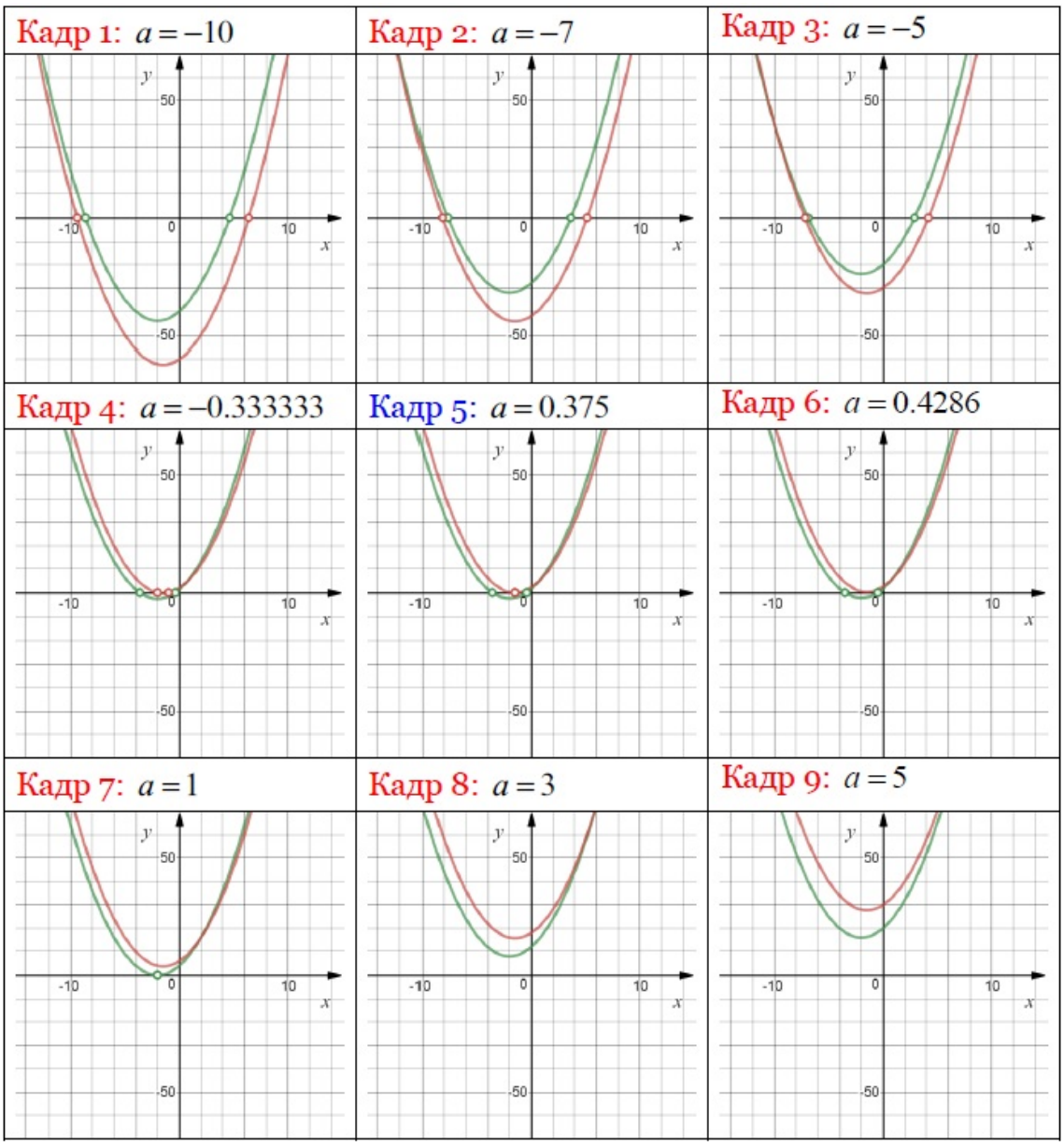


Рис. 2.33

Відповідь: таких a не існує.

Приклад 6. Точка $A(6;-12)$ є вершиною параболи $y(x)=ax^2+bx+c$, одна з її точок перетину з віссю Ox має абсциссу, що дорівнює 8. Визначити значення коефіцієнтів a, b і c.

Розв'язання. Координати вершини параболи $(x_в; y_в)$ задаються формулами: $x_в=-\dfrac{b}{2a}$, $\quad y_в=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

За умовою задачі $x_в=6$, $\quad y_в=-12$. Оскільки $y_в<0$ і парабола перетинає вісь абсцис, то її гілки спрямовані вверх, тобто $a>0$. Крім того,

нам відомо, що $y(8) = 64a + 8b + c = 0$.

Таким чином, вихідна задача зводиться до розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 6, \\ \dfrac{4ac - b^2}{4a} = -12, \\ 64a + 8b + c = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -12a, \\ a(a-3) = 0, \\ c = 32a; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -36, \\ \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a = 3, \end{array}\right. \text{ але має бути } a > 0, \\ c = 96. \end{cases}$$

Відповідь: $a = 3, \quad b = -36, \quad c = 96.$

Приклад 7. Для кожного значення параметра a визначити число розв'язків рівняння $x^2 + 2x - 3 = a^2 - 4a$.

Розв'язання. Наведемо два способи розв'язання цієї задачі.

Спосіб I. Перепишемо задане рівняння у вигляді

$$x^2 + 2x - 3 - a^2 + 4a = 0$$

і перейдемо до дослідження його дискримінанту $D = 4(a-2)^2$.

I. Квадратне рівняння не має дійсних розв'язків при $D < 0$. Звідси $(a-2)^2 < 0 \Rightarrow a \in \varnothing$. Тобто значень параметра a, при яких задане рівняння не має дійсних розв'язків немає.

II. Квадратне рівняння має один (два однакових) дійсний розв'язок при $D = 0$, тобто при $a = 2$.

III. Квадратне рівняння має два різних дійсних кореня при $D > 0$, тобто при $a \neq 2$.

Спосіб II. Графік квадратного тричлена $x^2 + 2x - 3$, що стоїть в лівій частині даного рівняння — парабола (рис. 2.34), з координатами вершини $(-1; -4)$. Оскільки гілки параболи спрямовані вверх, то множина значень функції $y(x) = x^2 + 2x - 3$ становить собою інтервал $[-4; +\infty]$.

Права частина заданого рівняння для кожного значення параметра a становить собою сталу функцію $y = a^2 - 4a$. Її графік — пряма лінія, що паралельна осі Ox. Можливі три варіанти розташування параболи і прямої.

I. Пряма не має спільних точок з параболою при $y = a^2 - 4a < -4$.

II. Пряма має одну спільну точку з параболою при $y = a^2 - 4a = -4$.

III. Пряма має дві спільних точки з параболою при $y = a^2 - 4a > -4$.

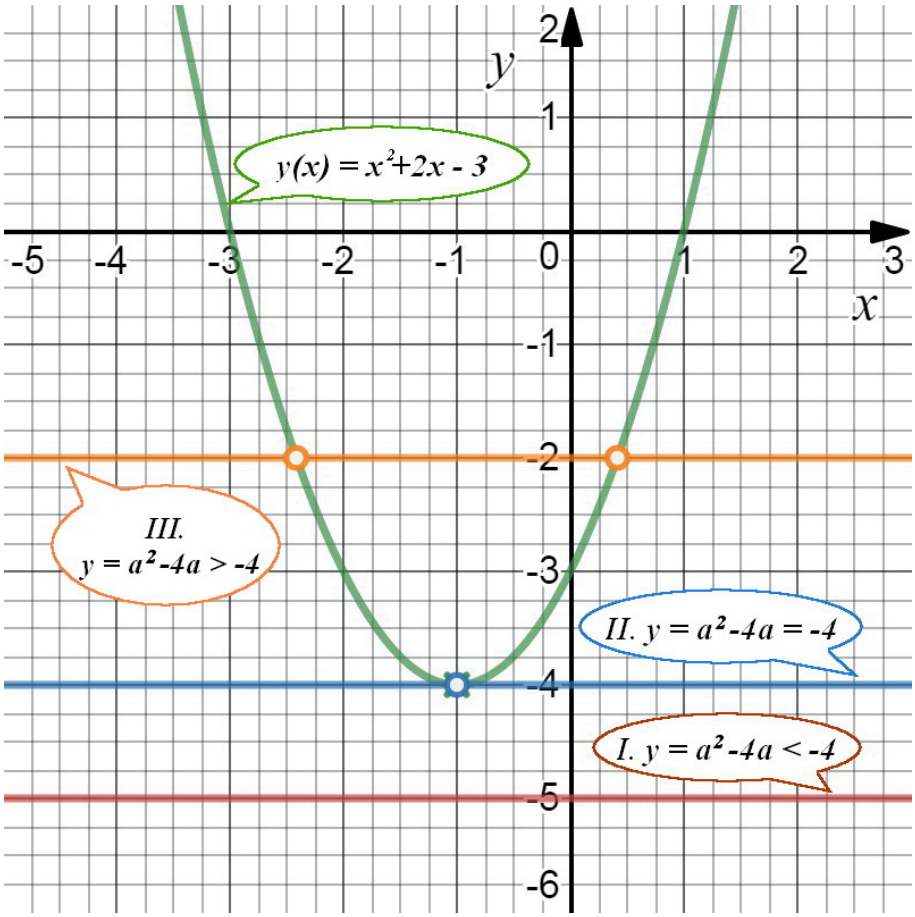


Рис. 2.34

Розглянемо кожен з отриманих випадків:

I. $a^2 - 4a < -4 \Leftrightarrow (a-2)^2 < 0$ — таких a не існує.

II. $a^2 - 4a = -4 \Leftrightarrow (a-2)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$ — вихідне рівняння має один розв'язок.

III. $a^2 - 4a > -4 \Leftrightarrow (a-2)^2 > 0$ — при всіх $a \neq 2$ вихідне рівняння має два розв'язки.

Відповідь: якщо $a = 2$, то рівняння має один дійсний розв'язок;

якщо $a \neq 2$, то рівняння має два різних дійсних розв'язки.

Приклад 8. Визначити знак числа c, якщо відомо, що квадратний тричлен ax^2+bx+c не має дійсних коренів і, крім того, справедлива нерівність $a\sqrt{63} - b\sqrt{21} + c\sqrt{7} < 0$.

Розв'язання. Оскільки квадратний тричлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ не має дійсних коренів, то його графік не має спільних точок з віссю абсцис (не перетинає вісь Ox), тобто розташований вище (гілки параболи спрямовані вверх) або нижче (гілки параболи спрямовані вниз) осі Ox. Це означає, що для всіх значень x квадратний тричлен $f(x)$ приймає значення одного знака. Далі визначимо цей знак.

Зауважимо, що $a\sqrt{63} - b\sqrt{21} + c\sqrt{7} =$

$$= \sqrt{7}(3a - b\sqrt{3} + c) = \sqrt{7}(a(-\sqrt{3})^2 + b(-\sqrt{3}) + c) = \sqrt{7}f(-\sqrt{3}).$$

З умови $a\sqrt{63} - b\sqrt{21} + c\sqrt{7} < 0$ випливає, що $f(-\sqrt{3}) < 0$, тобто $f(x) < 0$ при всіх значеннях $x \in \mathbb{R}$. Отже, і $f(0) < 0$, але $f(0) = c$, тобто $c < 0$.

Відповідь: $c < 0$.

Приклад 9. При яких значеннях параметра a рівняння

$$x^2 + (a + 4)x + a^2 - 16 = 0 \tag{2.18}$$

і

$$x^2 + 2(a - 8)x + a - 6 = 0 \tag{2.19}$$

рівносильні?

Розв'язання. Для відповіді на поставлене запитання скористаємося означенням 1.1.

1. Розглянемо спочатку рівняння (2.18)(рис. 2.35). Його корені позначимо x_1 і x_2. Обчислимо дискримінант $D = (a + 4)^2 - 4a^2 + 64 = -3a^2 + 8a + 80$ і перейдемо до його дослідження. Можливі такі випадки.

1.1. Квадратне рівняння (2.18) має один дійсний корінь $x = x_в = -\dfrac{a+4}{2}$ при $D = 0$, тобто при $3a^2 - 8a - 80 = 0$. Звідси дискримінант останнього рівняння $D_1 = 1024 = 32^2$ і $a_1 = -4$, $a_2 = \dfrac{20}{3}$. Тоді $x_1 = -\dfrac{a_1+4}{2} = 0$ і $x_2 = -\dfrac{a_2+4}{2} = -\dfrac{16}{3}$.

1.2. Квадратне рівняння (2.18) не має дійсних розв'язків при $D < 0$. Звідси $-3a^2 + 8a + 80 < 0$ або $3a^2 - 8a - 80 > 0$. Використовуючи результат, отриманий у попередньому пункті щодо нулів функції, отримаємо розв'язок останньої нерівності у вигляді $a \in (-\infty; -4) \cup \left(\frac{20}{3}; +\infty\right)$.

1.3. Залишається випадок, коли $D > 0$, тобто $a \in \left(-4; \frac{20}{3}\right)$ і рівняння (2.18) має два різних дійсних корені $x_{1,2} = \frac{-(a+4) \pm \sqrt{-3a^2 + 8a + 80}}{2}$.

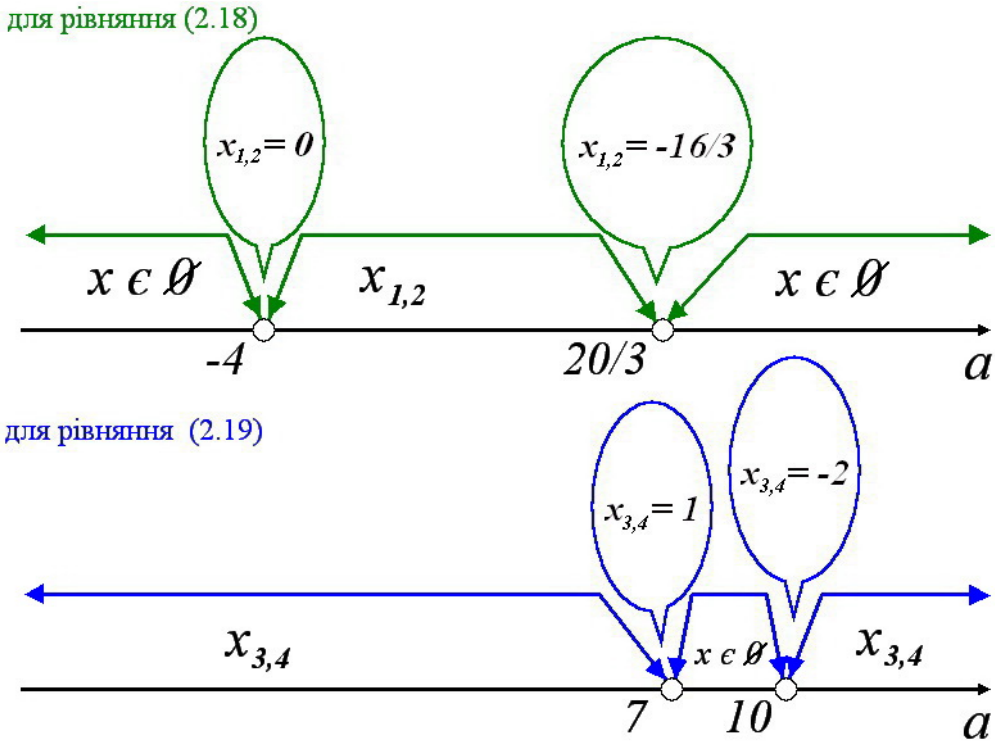


Рис. 2.35

2. Тепер розглянемо рівняння (2.19). Його корені позначимо x_3 і x_4. Як і раніше, обчислимо дискримінант $D = 4(a-8)^2 - 4(a-6) = 4(a^2 - 17a + 70)$ і перейдемо до його дослідження. Можливі такі випадки.

2.1. Квадратне рівняння (2.19) має один дійсний корінь $x = x_{\text{в}} = 8 - a$ при $D = 0$, тобто при $a^2 - 17a + 70 = 0$. Звідси дискримінант останнього рівняння $D_1 = 9$ і $a_1 = 7$, $a_2 = 10$. Тоді $x_3 = 8 - a_1 = 1$ і $x_4 = 8 - a_2 = -2$.

2.2. Квадратне рівняння (2.19) не має дійсних розв'язків при $D < 0$, тобто при $a^2 - 17a + 70 < 0$. Використовуючи результат, отриманий у

попередньому пункті щодо нулів функції, отримаємо розв'язок останньої нерівності у вигляді $a \in (7; 10)$.

2.3. Залишається випадок, коли $D > 0$, тобто $a \in (-\infty; 7) \cup (10; +\infty)$ і рівняння (2.19) має два різних дійсних корені $x_{3,4} = 8 - a \pm \sqrt{a^2 - 17a + 70}$.

Нанесемо результати розв'язання рівнянь (2.18) і (2.19) на осі параметра a (рис. 2.35).

Аналіз рис. 2.35 показує, що при $a \in (7; 10)$ рівняння рівносильні, оскільки обидва не мають коренів.

Відповідь: $a \in (7; 10)$.

Приклад 10. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких нерівність $ax^2 + ax + a + 3 > 0$ не має додатних розв'язків.

Розв'язання. При $a = 0$ нерівність набуде вигляду $3 > 0$, що вірно при будь-якому x.

При $a \neq 0$ розглянемо квадратичную функцію $f(x) = ax^2 + ax + a + 3$. Легко помітити, що при $a > 0$ (гілки параболи спрямовані вверх) нерівність має додатні розв'язки. При $a < 0$ (гілки параболи спрямовані вниз) задана нерівність не має додатних розв'язків в двох випадках:

1) квадратична функція $f(x) = ax^2 + ax + a + 3$ не має коренів, тобто парабола не перетинає вісь Ox;

2) корені квадратичної функції не перевищують 0.

Розглянемо ці випадки окремо.

1) квадратична функція $f(x) = ax^2 + ax + a + 3$ не має коренів, якщо $D < 0$, тобто при $-3a^2 - 12a < 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$. З урахуванням того, що $a < 0$ отримаємо $a \in (-\infty; -4)$.

2) скористаємося теоремою **Т.3** з табл. 2.1. Тоді задача зводиться до розв'язання системи $\begin{cases} D \geq 0, \\ af(0) \geq 0, \\ x_{\text{в}} \leq 0. \end{cases}$ Отже, з урахуванням того, що $a < 0$

отримаємо $\begin{cases} -3a^2 - 12a \geq 0, \\ a + 3 \leq 0, \\ -\dfrac{a}{2a} \leq 0, \\ a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in [-4; 0], \\ a \in (-\infty; -3], \\ a \neq 0, \\ a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow a \in [-4; -3].$

Об'єднуючи розв'язки для випадків 1) і 2), отримаємо $a \in (-\infty; -3]$.

Відповідь: $a \in (-\infty; -3]$.

Приклад 11. Знайти найменше значення x, при якому існують числа y і z такі, що виконується рівність $x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1$.

Розв'язання. Розглянемо задану рівність як квадратне рівняння відносно змінної z

$$z^2 - (x + y)z + x^2 + 2y^2 + xy - 1 = 0, \tag{2.20}$$

де змінні x і y є параметрами.

Рівняння (2.20) має розв'язок, якщо його дискримінант невід'ємний, тобто $D \geq 0 \Leftrightarrow -3x^2 - 7y^2 - 2xy + 4 \geq 0$.

Розглянемо останню нерівність як квадратну відносно змінної y

$$7y^2 + 2xy + 3x^2 - 4 \leq 0, \tag{2.21}$$

де змінна x є параметром.

У свою чергу, нерівність (2.21) має розв'язок, якщо її дискримінант невід'ємний, тобто $112 - 80x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1{,}4 \geq x^2 \Leftrightarrow -\sqrt{1{,}4} \leq x \leq \sqrt{1{,}4}$.

Найменше значення x, при якому існує розв'язок y нерівності (2.21) і розв'язок z рівняння (2.21), дорівнює $(-\sqrt{1{,}4})$. Отже, $(-\sqrt{1{,}4})$ — найменше значення x, що задовольняє умові задачі.

Відповідь: $x_{\text{найм}} = -\sqrt{1{,}4}$.

Приклад 12. Скільки коренів більше (-1) в залежності від a має рівняння $x^2 + (2a + 6)x + 4a + 12 = 0$?

Розв'язання. Розглянемо спочатку умови *існування одного кореня на*

інтервалі $x \in (-1; \infty)$. Можливі випадки **(I)** або **(II)** (рис. 2.36).

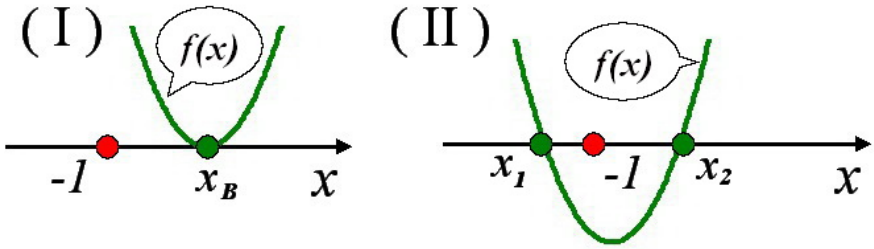


Рис. 2.36

Тоді прийдемо до сукупності $\left[\begin{array}{l}(I),\\(II).\end{array}\right.$ Або, скориставшись теоремами **T.1** і **T.7** з табл. 2.1, для нашої задачі, матимемо

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}D=0,\\x_{\text{в}}>-1,\end{cases}\\f(-1)\le 0;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(2a+6)^2-4(4a+12)=0,\\-(a+3)>-1,\end{cases}\\1-(2a+6)+4a+12\le 0;\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+2a-3=0,\\a+3<1,\end{cases}\\2a+7\le 0;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=-3,\\a=1,\end{array}\right.\\a<-2,\end{cases}\\a\le -3{,}5.\end{array}\right.$$

Розв'язком вихідної системи буде множина $a \in (-\infty; -3{,}5] \cup \{-3\}$ (рис. 2.37).

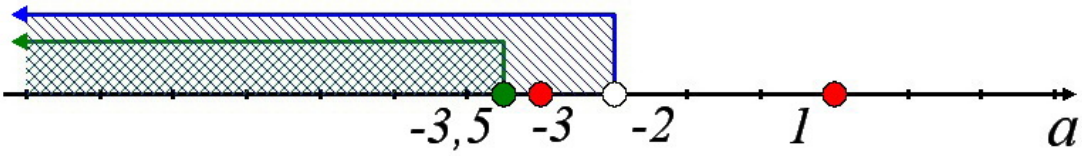


Рис. 2.37

Розглянемо тепер умови *існування двох коренів на* $x \in (-1; \infty)$. У цьому випадку знову скористаємося теоремою **T.1** з табл. 2.1, отримаємо

$$\begin{cases} D > 0, \\ f(-1) > 0, \\ x_{\text{в}} > -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2a - 3 > 0, \\ 2a + 7 > 0, \\ a + 3 < 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty), \\ a \in (-3{,}5; +\infty), \\ a \in (-\infty; -2). \end{cases}$$

Нанесемо отримані інтервали на вісь параметра a і знайдемо їх перетин (рис. 2.38).

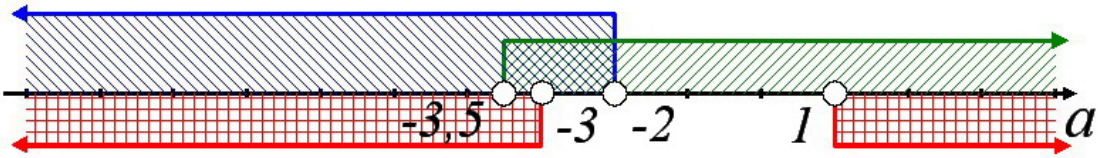


Рис. 2.38

Остаточно отримаємо $a \in (-3{,}5; -3)$.

Розв'язання цієї задачі можна продемонструвати у вигляді стоп-кадрів на рис. 2.39.

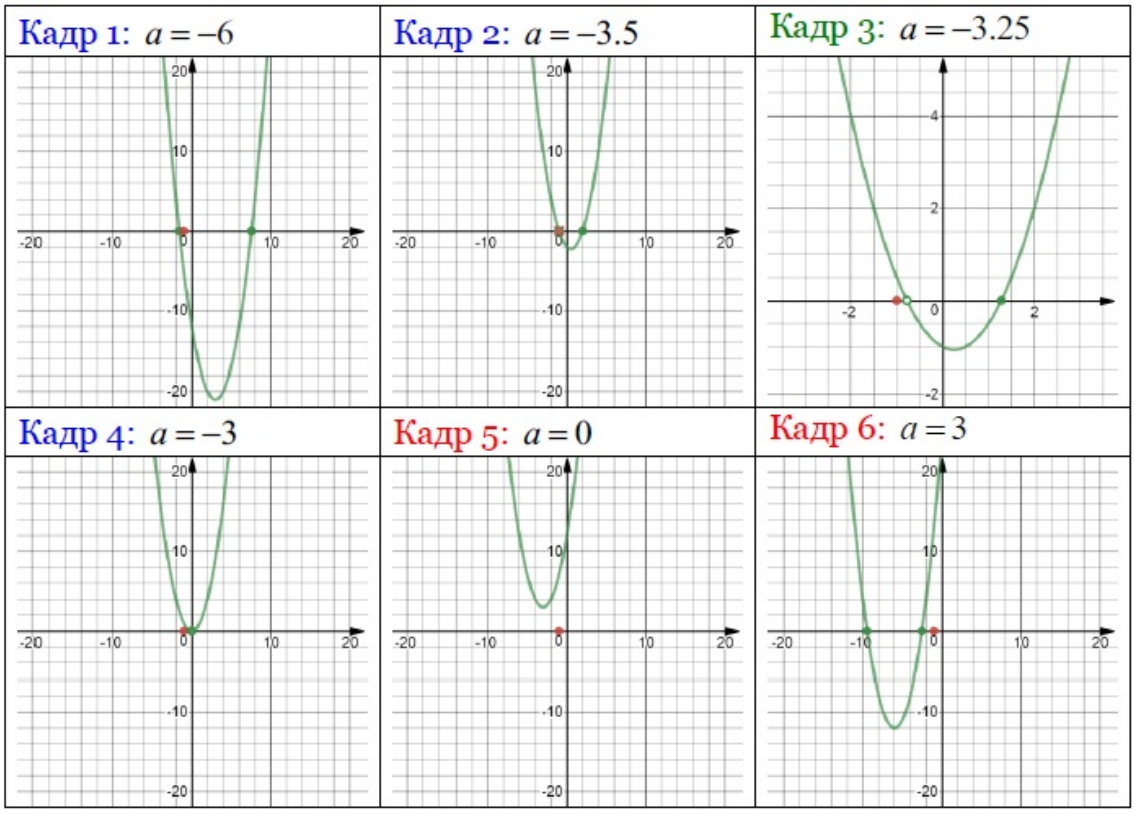


Рис. 2.39

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; -3{,}5] \cup \{-3\}$, то один корінь;
якщо $a \in (-3{,}5; -3)$, то два корені;
при решті a — коренів немає.

Завдання для самостійної перевірки знань

1. При яких значеннях параметра a рівняння $2x^2 - 6x + a + 2 = 0$ і $3x^2 + 2x - 3 - a = 0$ мають хоча б один спільний корінь?

Відповідь: $a = 2, \quad a = -\dfrac{82}{25}$.

2. При яких значеннях параметра a нерівності $x^2 + 6x - 7 < 0$ і $(6a - 5)x^2 - 5(a - 1)x + 2a - 6 > 0$ мають хоча б один спільний розв'язок?

Відповідь: $a \in \left(-\dfrac{7 + \sqrt{45}}{2}; -4 + \sqrt{12}\right)$.

3. Знайти множину значень функцій:

$$\text{а) } y = \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 - x - 1}; \quad \text{б) } y = \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 + x - 1}.$$

Відповідь: а) $a \in (-\infty; -1] \cup \left[\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$; **б)** $a \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

4. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких нерівність $\dfrac{2x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 1} \le a$ виконується для всіх дійсних значень x.

Відповідь: $a \in \left[\dfrac{10}{3}; +\infty\right)$.

5. Сформульовано наступні два твердження:

а) рівняння $ax - \sqrt{x} + 1 = 0$ має рівно один розв'язок;

б) нерівність $x^2 - 8ax + 1 \le 0$ має хоча б один розв'язок.

Визначити всі значення параметра a, при кожному з яких обидва твердження справедливі.

Відповідь: $a \in (-\infty; -0{,}25] \cup \{0{,}25\}$.

6. При яких значеннях параметра a корені рівнянь $x^2 + 3x + 2a = 0$ і $x^2 + 6x + 5a = 0$ перемежаються?

Відповідь: $a \in (0; 1)$.

7. При яких значеннях параметра a рівняння

$$x^2 + \frac{3x}{a} + 2a = 0 \quad \text{і} \quad x^2 + \frac{12x}{a} - a = 0$$

мають по два кореня і між коренями одного рівняння немає жодного кореня іншого рівняння?

Відповідь: $a \in (-\sqrt[3]{36}; -3) \cup \left(0; \sqrt[3]{\frac{9}{8}}\right)$.